

«بسمه تعالی»

ارتعاشات

vibration

مدرس: دکتر داود کلانتری

استادیار گروه مکانیک ماشین های کشاورزی

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری

فرم نهایی: توحید طحماسب پور (دانشجوی کارشناسی گروه)

جزوه درس:
ارتعاشات مکانیکی
vibration

مدرس: دکتر کلانتری

Dr. Ing. D. Kalantari

dkalantari2000@yahoo.com

dkalantari2000@gmail.com

مقدمه.....۵

اهمیت مطالعه ارتعاشات
اجزای سیستم نوسان
سیستم گسسته و پیوسته
ارتعاش آزاد و واداشته
ارتعاش میرا و نامیرا
ارتعاش منظم و تصادفی
کاربرد ارتعاشات در کشاورزی

فصل دوم: فرکانس ارتعاش طبیعی سیستم یک بعدی.....۸

ترکیب جرم ها
ترکیب فنرها (ضریب فنریت)
فرکانس طبیعی (نوسان)
انرژی جنبشی و پتانسیل
تمرینات

فصل سوم: ارتعاش آزاد با یک درجه آزادی.....۲۰

ارتعاش آزاد سیستم با حرکت انتقالی نامیرا
ارتعاش آزاد سیستم با حرکت پیچشی نامیرا
معادله حرکت سیستم جرم _ فنر در وضعیت عمودی
ارتعاش آزاد با میرایی ویسکوز
ارتعاش آزاد با میرایی کولمب
تمرینات

فصل چهارم: ارتعاش اجباری یک بعدی هارمونیک.....۲۷

پاسخ هارمونیک یک سیستم نامیرا
پدیده ضربان
پاسخ هارمونیک یک سیستم میرا
پاسخ یک سیستم میرا با پایه برانگیخته
نیروی انتقال یافته
پاسخ سیستم میرا با نامیرایی چرخان
پاسخ سیستم میرا با نامیرایی کولمب
پاسخ سیستم میرا با نامیرایی پسماند
تمرینات

فصل پنجم: ارتعاشات اجباری با نیروی دلخواه (پاسخ به یک سیستم برانگیزش کلی)..... ۴۳

پاسخ سیستم به نیروی متناوب کلی

پاسخ سیستم به نیروی متناوب نامنظم

اثر ضربه در سیستم ارتعاش (ضربات منفرد و متوالی)

سری فوریه

انتگرال کانولوشن

تبدیل لاپلاس

تمرینات

مقدمه

با ابداع اولین ابزار موسیقی انسان به موضوع ارتعاشات علاقه مند شد و به مطالعه آن همت گماشت که موضوع ارتعاش به عیناً در ابزار موسیقی مانند چنگ و تار بود. فیثاغورث را اولین شخص می دانند که درباره اصول موسیقی بصورت علمی مطالعه کرده است و آزمایشاتی درباره سیم مرتعش انجام داد در چین هم بدلیل زلزله محققان را به فکر ارتعاش برد و یک لرزه نگار از جنس برنز اختراع کردند. پدیده هایی مانند زلزله و طوفان و انتقال محوله ها روی وسایل نقلیه چرخ دار مشخصه تصادفی دارند از این رو تحلیل ارتعاشات تصادفی ضرورت دارد اهمیت مطالعه ارتعاشات اغلب فعالیت انسان به گونه ای با ارتعاشات سروکار دارد. به عنوان مثال می شنویم به دلیل آنکه پرده گوش مرتعش می شود یا می بینیم زیرا امواج نور نوسان می کند تنفس با نوسان ریه ها یا قدم زدن با حرکت نوسانی دست و پا و غیره انجام می شود. امروزه عمده‌تاً درباره ارتعاشات مطالعه می کنند و آن را در طراحی ماشین ها، فونداسیون ها، سازه ها و موتورها و سیستم کنترل به کار می برند و اکثراً دستخوش نوسان هستند. وقتی فرکانس طبیعی ارتعاشات یک سیستم با فرکانس برانگیزش خارجی برابر می شود، پدیده **تشدید** روی می دهد و نمونه های زیادی از شکست سیستم بر اثر تشدید وجود دارد. یکی از اهداف مهم مطالعه ارتعاشات، کاهش ارتعاشات از طریق طراحی درست ماشین آلات است و سعی می شود نامیزانی ماشین به حداقل برسد؛ از این رو در سال های اخیر کاربرد وسایل مرتعش گسترش یافته است.

نوسان:

هر حرکتی را که پس از یک بازه زمانی تکرار می شود، ارتعاش یا نوسان گویند
اجزای سیستم نوسان:
یک سیستم نوسانی به طور کلی شامل ذخیره کننده پتانسیل (فنر یا یک جسم الاستیک)، ذخیره کننده انرژی جنبشی (جرم یا اینرسی) و مستهلک کننده انرژی (میراگر).
هنگام نوسان انرژی پتانسیل سیستم به انرژی جنبشی تبدیل می شود و برعکس
سیستمی را که درجه آزادی آن ها محدود است، سیستم **گسسته** گویند
سیستمی را که درجه آزادی آن ها نامحدود است، سیستم **پیوسته** گویند

ارتعاش آزاد:

اگر یک سیستم را پس از آشفتگی اولیه بدون دخالت نیروی خارجی به نوسان در آید **ارتعاش آزاد** گویند؛ مانند آونگ ساده.

ارتعاش واداشته:

اگر یک سیستم را تحت تاثیر یک نیروی خارجی نوسان کند، **ارتعاش واداشته** گویند.

ارتعاشات میرا:

اگر انرژی یک سیستم نوسانی تلف شود و در آخر بایستد را **ارتعاشات میرا** گویند.

ارتعاشات نامیرا:

اگر انرژی یک سیستم نوسانی تلف نشود را **ارتعاشات نامیرا** گویند.

در حالت تشدید میرایی بسیار حائز اهمیت می شود.

ارتعاش منظم:

اگراندازه برانگیزش موثر در یک سیستم نوسانی در هر لحظه معلوم باشد، آن برانگیزش منظم و حرکت سیستم را ارتعاشات منظم گویند گاهی برانگیزش تصادفی است

ترکیب فنرها:

فنر موازی- فنر سری

اجزای میرایی:

۱_ سیستم با میرایی ویسکوز

۲_ سیستم با میرایی کولمب (اصطکاک خشک)

۳_ سیستم با میرایی پسماند

کاربرد ارتعاشات در کشاورزی

آنالیز ارتعاشات، در بسیاری از صنایع به عنوان یکی از تکنیک های اصلی پایش وضعیت و عیب یابی تجهیزات دوار، مورد پذیرش قرار گرفته و بکار می رود. از یک دیدگاه کلی، ارتعاشات ماشین آلات در دو دسته قابل تقسیم است: ارتعاشات حالت پایدار و ارتعاشات حالت گذرا (ماشینهای دور متغیر و یا ماشینهای دور ثابت هنگام استارت یا خارج کردن). برای دسته اول روشهایی همچون تحلیل مقدار کلی ارتعاش، آنالیز فرکانسی، آنالیز شکل موج و آنالیز فاز و برای دسته دوم، آنالیز شکل موج، منحنی بود و نایکویست، منحنی قطبی، منحنی آبشاری یا واترفال بیشترین کاربرد را دارا هستند. در این مقاله استفاده از پارامترهای فرآیندی برای تکمیل عیب یابی از طریق ارتعاشات، مورد مطالعه قرار می گیرد.

تشخیص خطا یا عیب یابی در ماشین های دوار با آنالیز ارتعاشات یکی از پارامترهای مهم در نگهداری این ماشین ها محسوب شده و از دیرباز مورد توجه قرار گرفته است. استفاده از ارتعاش برای مانیتورینگ و عیب یابی از ۵۰ سال پیش آغاز گردید. تشخیص مشکل ماشینها از روی عارضه های ثانویه در آنها علاوه بر رفع عیب پیش آمده، از خرابی و استهلاک بیشتر ماشین نیز جلوگیری خواهد کرد. امروزه به علت رقابت های تجاری و حتی نظامی و بزرگی بیش از اندازه و اهمیت ماشین ها، تشخیص خطا در این سیستم های نیز اهمیت بیشتری یافته است. اهمیت عیب یابی سریع در ماشین های حساس و بزرگ، بیشتر بخاطر جلوگیری از خروج ماشین از سرویس و یا عدم تولید است که هزینه ناشی از آن در خیلی از موارد به مراتب بیشتر از رفع عیب می باشد.

آنالیز ارتعاشات یکی از روشهای مرسوم در عیب یابی ماشین های دوار محسوب می گردد. به علت ماهیت دینامیکی این ماشین ها و تغییر مشخصه های دینامیکی آنها در اثر پیدایش عیوب مختلف و در نتیجه نحوه تغییر پاسخ آنها، در روشهای عیب یابی مؤثر می باشند. عیب یابی با ارتعاشات در ماشین ها از سال ها پیش و به خصوص با پیشرفت وسایل اندازه گیری و پردازش ارتعاشات مورد توجه بوده و روز به روز کامل تر شده است.

متداولترین عوامل ایجاد ارتعاش در ماشین های دوار عبارتند از:

- ۱- عدم تعادل جرمی
- ۲- عدم هم محوری در کوپلینگ ها
- ۳- محورهای خمیده
- ۴- چرخ دنده های سائیده شده
- ۵- یاتاقان های سائیده شده و خراب

- ۶- تماس موتور با قسمت های ساکن
- ۷- نیروهای الکترومغناطیسی
- ۸- نیروهای هیدرولیکی و آیرودینامیکی و کاویتاسیون
- ۹- لقی
- ۱۰- تشدید

نکات موجود در اندازه گیری ارتعاشات:

- ۱- بهترین نقاط اندازه گیری ارتعاشات ماشین های دوار یاتاقان های دستگاه هستند؛ زیرا یاتاقان ها، فصل مشترک دستگاه با محیط می باشند و ارتعاشات از طریق یاتاقان به بخش مورد نظر می رسد. همچنین آسیب پذیرترین عضو ماشین آلات عمدتاً، یاتاقان می باشد.
- ۲- اندازه گیری را می توان در جهات مختلفی در هر نقطه انجام داد. لذا با توجه به تجربه می توان این اندازه گیری را در دو جهت یا فقط یک جهت انجام داد.
- ۳- بین سه عامل جابه جایی، سرعت و شتاب، مقدار سرعت برای سنجش ارتعاش توصیه شده است. در یاتاقان های ژورنال، جابه جایی شافت نسبت به یاتاقان اندازه گیری می شود. برای تشخیص عیب گیربکس هایی که دارای دورهای بالا هستند، شتاب عامل گویا تری است.
- ۴- سنسورهای ارتعاشات می توانند از نوع تماسی یا غیرتماسی باشند. سنسورهای غیرتماسی بر مبنای امواج الکترومغناطیسی، ارتعاش محورها را اندازه می گیرند. این سنسورها بر روی یاتاقان محکم شده و تحت حرکت ارتعاشی یاتاقان قرار دارند ولی همواره فاصله نسبی شافت از یاتاقان را اندازه می گیرند. در مواردی که اندازه گیری دائمی در ماشین آلات حساس کارخانه مدنظر باشد، از این نوع سنسورها استفاده می شود. سنسورهای تماسی به وسیله آهن ربا و یا پیچ به یاتاقان دستگاه متصل شده که جابه جایی مطلق یاتاقان را اندازه می گیرند. این سنسورها برای یاتاقان های بلبرینگی مناسب هستند. این سنسورها معمولاً سرعت و شتاب نقاط را اندازه می گیرند.
- ۵- در مورد انتخاب حسگر ها باید به حساسیت و محدوده دینامیکی توجه داشت. سازندگان سنسورها حساسیت مناسب برای انتخاب سنسور را ذکر نموده و کاربرد سنسور را نیز مشخص می نمایند.
- ۶- سنسورها باید در فرکانس های مختلف دارای حساسیت یکسان باشند تا تمامی دامنه های مربوط به فرکانس های مختلف را درست اندازه بگیرند.
- ۷- معمولاً حوزه فرکانسی شتاب سنج های پیزوالکتریک (از نوع تماسی) وسیع تر و حساسیت آنها در این حوزه وسیع ثابت می باشد.
- ۸- گاهی اوقات با استفاده از فیلترهایی می توان بخش فرکانسی مطلوب ارتعاشات را آشکار کرده و بقیه فرکانس ها و دامنه های مربوطه را حذف نمود.

از عوامل موثر بر تعیین دوره های زمانی، برای اندازه گیری لرزش و تعداد دفعات اندازه گیری و ثبت ارتعاشات می توان به حساسیت دستگاه و تعداد نفرات نیروی انسانی متخصص و امکانات موجود اشاره کرد. موضوع ارتعاشات اهمیت بسیار زیادی در ماشین های صنعتی دارد.

فصل دوم:

❖ ارتعاشات یک بعدی و دو بعدی :

درجه آزادی یک سیستم به صورت زیر تعریف می شود:

کمترین تعداد مختصات مستقلی که برای تعیین وضعیت تمام اجزای سیستم در هر لحظه مورد نیاز است. ارتعاشات به صورت یک درجه آزادی، دو و سه درجه آزادی است. به عنوان مثال یک آونگ ساده ارتعاش یک بعدی دارد؛ و یا یک سیستم با دو غلتک که به وسیله یک میله به هم متصلند و در دو جهت مخالف می گردند ارتعاش دوبعدی است.

ضریب فنریت اجزای مکانیکی :

برای بدست آوردن ضریب فنریت به نحوه قرار گرفتن جرم توجه می کنیم، که سه مورد آن مورد بررسی قرار می گیرد.

فنر به صورت یک میله ی کششی :



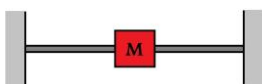
$$F = Kx = K. \delta \Rightarrow K = \frac{F}{\delta}$$

فنر به صورت تیر یک سر گیر دار:



$$\delta = \frac{FL^3}{3AE}, \quad K = \frac{F}{\delta} \Rightarrow K = \frac{3AE}{L^3}$$

فنر به صورت تیر دو سر گیر دار:

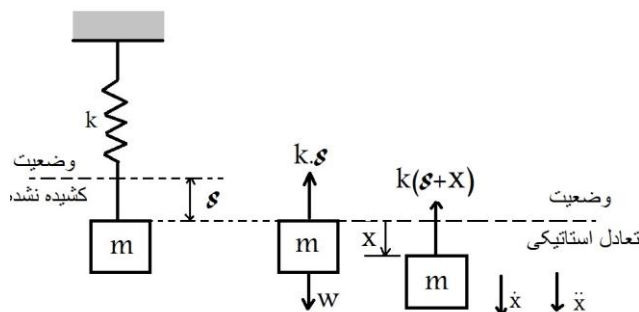


$$\delta = \frac{FL^3}{192 AE}, \quad K = \frac{F}{\delta} \Rightarrow K = \frac{192AE}{L^3}$$

حالت استاتیکی)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +mg - F_k = 0$$

$$+mg - K \cdot \delta_{st} = 0 \Rightarrow mg = K\delta_{st}$$



حالت دینامیکی)

$$\sum F_x = ma_x = m\ddot{x} \Rightarrow +mg - K(x + \delta_{st}) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - Kx - K\delta_{st} = m\ddot{x} \rightarrow (mg = K\delta_{st})$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ با ضرایب ثابت

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } m} \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\text{فرکانس ارتعاش طبیعی سیستم} \quad r^2 + \frac{K}{m} = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot i$$

به صورت کلی تر داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$$

نکته: پس از این در رابطه ی $\sum F_x = ma_x = m\ddot{x}$ فقط نیروهایی را وارد می کنیم که نسبت به زمان تغییر کنند به طور مثال نیروهایی مانند وزن که نسبت به زمان ثابت اند را وارد معادله نمی کنیم.

محاسبه ی جرم معادل در سیستم های ارتعاشی یک بعدی :

برای محاسبه ی جرم معادل از برابری انرژی جنبشی سیستم معادل (سیستم ساده شده ی جرم-فنر) با سیستم اصلی استفاده می کنیم. در یک سیستم متشکل از چند جرم برای سهولت می توان از یک جرم معادل استفاده کرد:

۱- ترکیب جرم هایی که به یک میله صلب متصلند و حرکت انتقالی دارند.

$$\sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2$$

۲- ترکیب جرم هایی که حرکت انتقالی و دورانی دارند.

$$\sum \frac{1}{2} j_{oi} \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} j_{oeq} \dot{\theta}_{eq}^2$$

نحوه ی ذخیره انرژی جنبشی در جسم:

اصل پایستگی انرژی:

اگر یک سیستم فقط تحت تاثیر نیروی پتانسیل قرار داشته باشد، انرژی کل آن ثابت می ماند و آن را سیستم پایستار می گویند. چون بخشی از انرژی یک سیستم نوسانی به صورت جنبشی و بخشی دیگر به صورت پتانسیل است، مجموع این دو انرژی برای یک سیستم پایستار ثابت است. انرژی جنبشی در جرم و انرژی پتانسیل در فنر ذخیره می شود و فرمولهای زیر برای نحوه ذخیره انرژی جنبشی در جرم است.

۱. اگر جسم به جرم m دارای حرکت خطی در راستای y یا x باشد مقدار انرژی جنبشی ذخیره شده در این جسم برابر خواهد بود با :

$$\begin{cases} E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ E_K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \end{cases} \text{ حرکت خطی جسم}$$

۲. اگر جسم استوانه ای یا دیسکی شکل با شعاع r حول مرکز ثقل خود دوران کند، به اندازه ی $E_K = \frac{1}{2} j_o \dot{\theta}^2$ انرژی جنبشی در خود ذخیره می کند.

$$j_o = \frac{1}{2} m r^2$$

برای دیسک و استوانه با شعاع r و طول h :

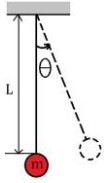
$$j_o = \frac{1}{2} (\rho V) r^2 = \frac{1}{2} \rho (\pi r^2 \cdot h) \cdot r^2 \Rightarrow j_o = \rho h \left(\frac{\pi r^4}{2} \right)$$

۳. حرکت دورانی میله حول یک سر آن:



$$j_o = \frac{1}{3} m l^2$$

۴. حرکت پاندولی جرمی به جسم m حول نقطه O به فاصله L :



$$j_0 = ml^2$$

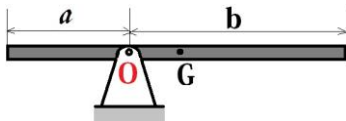
۵. اگر دیسکی یا استوانه ای بر روی زمین غلت بخورد (سطح زمین زبر باشد) هر دو نوع انرژی خطی و دورانی را در خود ذخیره می کند .

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, E_K = \frac{1}{2} j_0 \dot{\theta}^2$$

۶. چنان چه جرم فنر در یک سیستم ارتعاشی نسبت به بقیه اجزای سیستم قابل توجه باشد به اندازه $E_K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m \right) \dot{x}^2$ در خود انرژی ذخیره می کند، به عبارت دیگر :

$$m_{eq} = \frac{1}{3} m$$

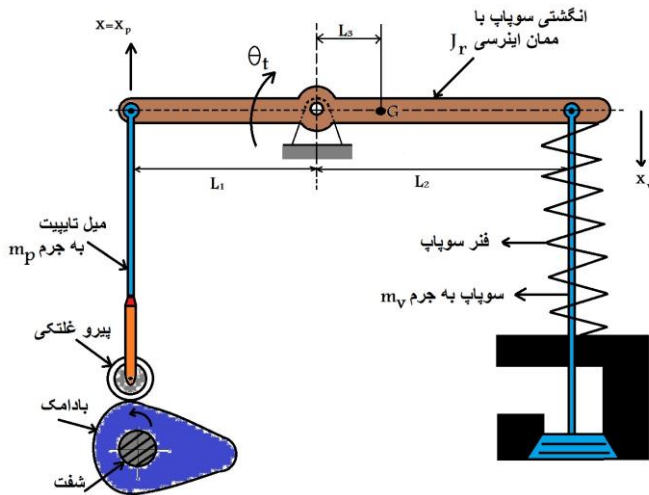
۷.



$$j_0 = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \Rightarrow j_0 = \frac{1}{3} ml^2$$

$$j_0 = \frac{1}{12} ml^2 + md^2 \Rightarrow j_0 = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} - a \right)^2$$

مثال: جرم معادل سیستم ارتعاشی نشان داده شده را محاسبه کنید.



$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \left[\frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} j_0 \dot{\theta}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_3 \right) \dot{x}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_4 \right) \dot{x}^2 \right] = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

$$\Delta AA'O \sim \Delta OBB' \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$\text{روش دوم} \rightarrow \tan \theta = \frac{x_1}{l_1} = \frac{x}{l_3} \rightarrow \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}} = \frac{l_1}{l_3} \rightarrow \dot{x}_1 = \left(\frac{l_1}{l_3} \right) \dot{x}$$

$$x_3 = x = l_3 \theta \rightarrow \dot{x} = l_3 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{l_3} \quad \text{و} \quad \dot{x}_2 = \left(\frac{l_2}{l_3} \right) \dot{x}$$

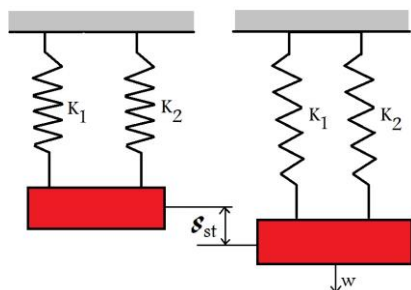
$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{l_1}{l_3} \right)^2 \dot{x}^2 + \left[\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l_2}{l_3} \right)^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} j_0 \left(\frac{1}{l_3} \right)^2 \dot{x}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_3 \right) \dot{x}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_4 \right) \dot{x}^2 \right] = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

$$\Rightarrow m_{eq} = m_1 \left(\frac{l_1}{l_3} \right)^2 + m_2 \left(\frac{l_2}{l_3} \right)^2 + j_0 \left(\frac{1}{l_3} \right)^2 + m_3 + \frac{1}{3} m_4$$

روش های محاسبه ی سفتی (ضریب فنریت) معادل سیستم :

در ارتعاشات فنرها نقش مهمی را ایفا می کنند و در اکثر ماشین ها از چندین فنر استفاده می شود که ساختار آنها به صورتهای زیر می باشد:

فنر موازی :



$$\sum P_i = \sum P_{eq} \Rightarrow \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 = \frac{1}{2} K_{eq} x^2$$

$$x_1 = x_2 = x$$

$$\therefore K_1 + K_2 = K_{eq}$$

$$\text{حالت کلی: } K_{eq} = \sum_{i=1}^N K_i$$

• فنر های سری:

$$\begin{cases} F_{K_1} = mg = K_1 \cdot x_1 \\ F_{K_2} = mg = K_2 \cdot x_2 \rightarrow x_1 = \frac{mg}{K_1}, x_2 = \frac{mg}{K_2}, x = \frac{mg}{K_{eq}} \\ F_{K_{eq}} = mg = K_{eq} \cdot x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 = \frac{1}{2} K_{eq} x^2 \rightarrow K_1 \left(\frac{mg}{K_1} \right)^2 + K_2 \left(\frac{mg}{K_2} \right)^2 = K_{eq} \left(\frac{mg}{K_{eq}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{K_{eq}}$$

$$\text{حالت کلی: } \frac{1}{K_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{K_i}$$

ارتعاشات یک بعدی:

فرکانس طبیعی ارتعاش:

اگر یک سیستم پس از آشفتگی اولیه بدون دخالت نیروهای خارجی به نوسان درآید فرکانس حرکت آن را فرکانس طبیعی گویند و یک سیستم نوسانی با n درجه آزادی به طور کلی دارای n فرکانس طبیعی مختلف است و فرکانس از جذر ترکیب ضریب فنریت تقسیم بر ترکیب جرم معادل بدست می آید و به صورت زیر بیان می شود:

محاسبه ی فرکانس ارتعاش طبیعی سیستم یک بعدی :

۱. روش محاسبه ی مستقیم K_{eq} و m_{eq} :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$$

۲. روش قانون دوم نیوتن برای سیستم ارتعاش :

۲-۱) ارتعاش خطی :

$$\sum F_x = m a_x = m \ddot{x}$$

۲-۲) ارتعاش دورانی (زاویه ای)

$$\sum M_o = j \cdot \ddot{\theta}$$

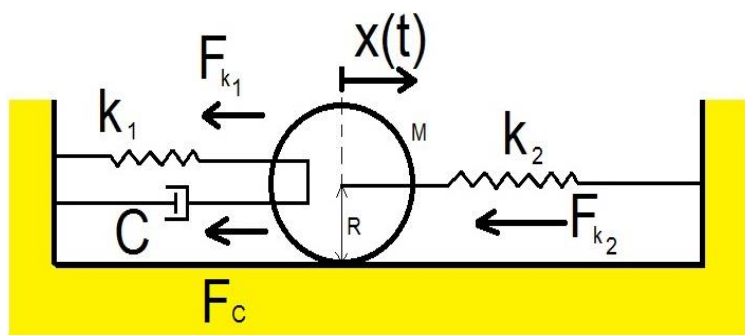
۳. روش پایستگی انرژی در سیستم :

$$E_K + E_P = cte \Rightarrow \frac{d}{dt}(E_K + E_P) = 0$$

۴. روش رایلی : در هر سیستم ارتعاش بدون استهلاک انرژی :

$$E_{K_{Max}} = E_{P_{Max}}$$

مثال) فرکانس ارتعاش طبیعی در شکلهای زیر را محاسبه کنید.



$$\begin{cases} F_{K1} = K_1 \cdot x_1 \\ F_{C1} = C_1 \cdot \dot{x}_1 \end{cases}, \quad x = R\theta \rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\sum F_x = m_{eq} a_x = m_{eq} \ddot{x}$$

$$m_{eq}\ddot{x} + C\dot{x} + K_{eq}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{C}{m_{eq}}\dot{x} + \frac{K_{eq}}{m_{eq}}x = 0$$

$$-F_{K_1} - F_c - F_{K_2} = m_{eq}\ddot{x} \Rightarrow -K_1 \cdot x_1 - C\dot{x} - K_2 \cdot x_2 = m_{eq}\ddot{x}$$

$$\therefore m_{eq}\ddot{x} + C\dot{x} + (K_1 + K_2)x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{C}{m_{eq}}\dot{x} + \frac{(K_1 + K_2)}{m_{eq}}x = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{(K_1 + K_2)}{m_{eq}}}$$

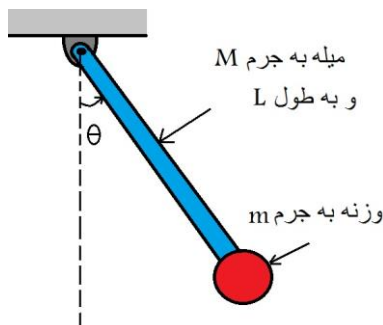
محاسبه ی m_{eq} :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}j_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 \Rightarrow m\dot{x}^2 + j_0\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = m_{eq}\dot{x}^2$$

$$\therefore m_{eq} = m + \frac{j_0}{R} \Rightarrow m_{eq} = 1.5m$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{(K_1 + K_2)}{1.5m}}$$

شکل شماره ۲)



$$-Mgd_1 - mgd_2 = (ML^2 + \frac{1}{3}mL^2)\ddot{\theta}$$

$$-Mg(L\sin\theta) - mg\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) = (ML^2 + \frac{1}{3}mL^2)\ddot{\theta}$$

$$\text{if } \theta \leq 6^\circ \rightarrow \sin\theta \cong \theta$$

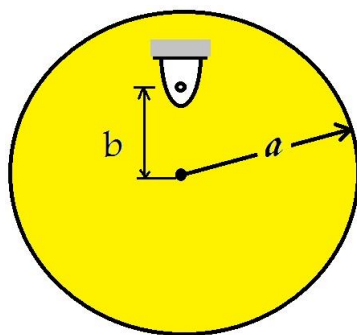
$$(ML^2 + \frac{1}{3}mL^2)\ddot{\theta} + (MgL + mg\frac{L}{2})\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{MgL + mg\frac{L}{2}}{ML^2 + \frac{1}{3}mL^2}\right]\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{Mg + \frac{mg}{2}}{ML + \frac{1}{3}mL}}$$

اگر از جرم میله صرف نظر شود:

$$\frac{m}{M} \ll 1 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g + \left(\frac{m}{M}\right)\frac{g}{2}}{L + \frac{1}{3}\left(\frac{m}{M}\right)L}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

شکل شماره ۳



وقتی لولا در نقاط مختلف دیسک قرار می گیرد، ممان اینرسی قطبی آن

فرق می کند و به صورت زیر به دست می آید:

$$\Sigma M_o = j. \ddot{\theta}$$

$$j_o = j_G + ma^2 = \frac{1}{2}mR^2 + ma^2 = \left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)m$$

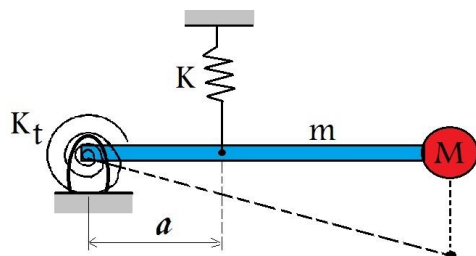
$$\text{for } \theta \leq 6^\circ : -mg(a\theta) = \left[\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)m\right] \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)m} \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{ga}{\frac{R^2}{2} + a^2}}$$

نکته: معمولاً j_o در مبدا است ولی چون در این مثال مبدا عوض شده خواهیم داشت:

$$j_o = j_G + ma^2$$

شکل شماره ۴



نکته: در فنر خطی وقتی جمع میشود به ما نیرو می دهد ولی فنر پیچشی را جمع یا باز کنیم دیگر نیرو نمی دهد و فقط ممان می دهد.

$$F_x = K \cdot x \quad \text{فنر خطی:}$$

$$M_t = K_t \cdot \theta \quad \text{فنر پیچشی:}$$

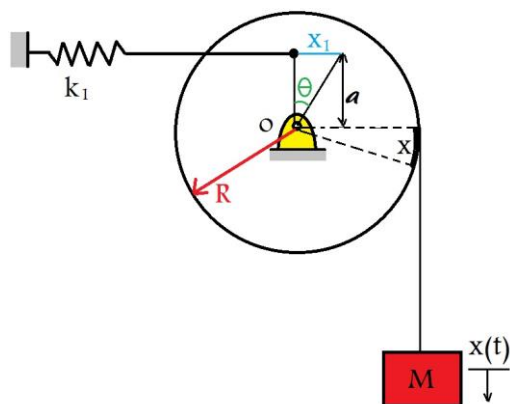
$$\Sigma M_o = j \cdot \ddot{\theta} \quad (\text{جواب})$$

$$-F_{K_1} \cdot a - K_t \cdot \theta = \left(ML^2 + \frac{1}{3} mL^2 \right) \ddot{\theta} \rightarrow F_{K_1} = K_1 \cdot a\theta$$

$$\left(ML^2 + \frac{1}{3} mL^2 \right) \ddot{\theta} + (K_1 a^2 + K_t) \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K_1 a^2 + K_t}{ML^2 + \frac{1}{3} mL^2} \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_1 a^2 + K_t}{ML^2 + \frac{1}{3} mL^2}}$$

شکل شماره ۵)



در این شکل باید توجه داشت که دیسک فقط حرکت دورانی دارد و وزنه فقط حرکت خطی دارد، بنابراین معادلات انرژی جنبشی مختص به خود را دارند.

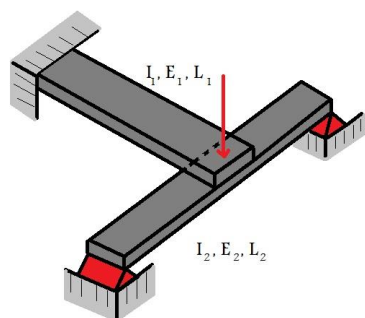
$$\Sigma M_o = j \cdot \ddot{\theta}$$

$$-F_{K_1} \cdot a = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \ddot{\theta} \Rightarrow -(K_1 \cdot x_1) a = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} M + m \right) R^2 \ddot{\theta} + K_1 a(a\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{K_1 a^2}{\left(\frac{1}{2} M + m \right) R^2} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{\frac{1}{2}M+m}} \left(\frac{a}{R}\right)$$

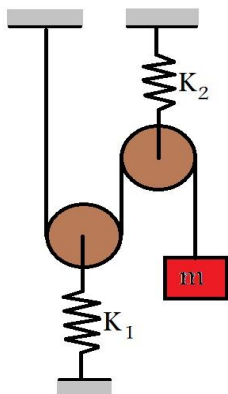
شکل شماره ۶)



نوک تیر یک، یک سر گیردار است و وسط تیر دو به صورت دوسرگیردار می باشد، چون هر دو تیر دارای یک سر مشترک و یک سر ثابت هستند، بنابراین موازی می باشند.

$$K_{eq} = K_1 + K_2 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{3E_1 I_1}{L_1^3} & \text{نوک تیر} \\ K_2 = \frac{48E_2 I_2}{L_2^3} & \text{وسط تیر} \end{cases}$$

شکل شماره ۷)



$$\frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 = \frac{1}{2} K_{eq} x^2$$

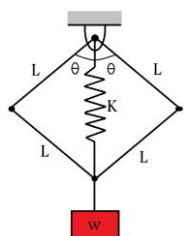
$$\begin{cases} F_{K_1} = 2T = K_1 \cdot x_1 \\ F_{K_2} = 2T = K_2 \cdot x_2 \rightarrow x_1 = \frac{2T}{K_1}, x_2 = \frac{2T}{K_2}, x = \frac{T}{K_{eq}} \\ F_{K_{eq}} = T = K_{eq} \cdot x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 = \frac{1}{2} K_{eq} x^2$$

$$\rightarrow K_1 \left(\frac{2T}{K_1} \right)^2 + K_2 \left(\frac{2T}{K_2} \right)^2 = K_{eq} \left(\frac{T}{K_{eq}} \right)^2$$

$$\Rightarrow K_{eq} = \frac{4}{K_1} + \frac{4}{K_2} \quad \Rightarrow K_{eq} = \frac{K_1 \cdot K_2}{4(K_1 + K_2)}$$

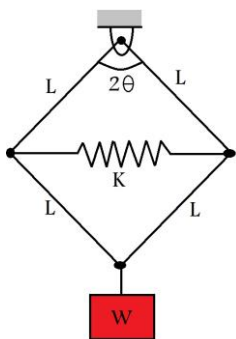
شکل شماره ۸



$$K_{eq} = K$$

چون قاب ها در کشش فنر تاثیری ندارند ، بنابراین داریم:

شکل شماره ۹



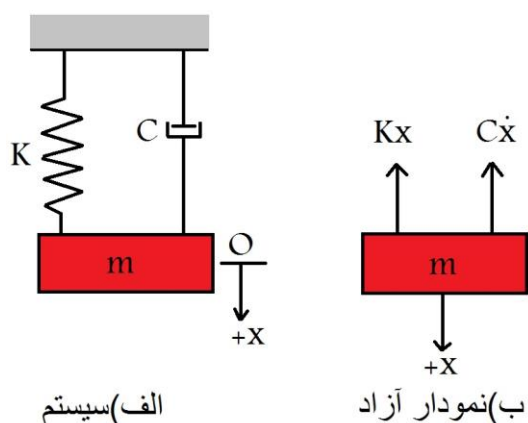
با رها شدن وزنه از قاب زاویه راس ثابت قاب ، کوچکتر شده بنابراین فنر جمع می شود و ضریب فنریت معادل به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} \Delta h = x \\ \Delta y = x_{\text{فنر}} \end{cases}$$

$$h^2 + y^2 = L^2 \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} 2h\Delta h + 2y\Delta y = 2L\Delta L = 0 \Rightarrow hx + yx_{\text{فنر}} = 0 \rightarrow x = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot x_{\text{فنر}}$$

$$\frac{1}{2} K x_{\text{فنر}}^2 = \frac{1}{2} K_{eq} x^2 \Rightarrow K \left(\frac{x}{-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 = K_{eq} x^2 \Rightarrow K_{eq} = K \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

تحلیل حرکت ارتعاشی یک بعدی:



C : ضریب میرایی سیستم
 K : ضریب فنریت سیستم

سیستم هایی که فقط بر اثر آشفتگی اولیه و بدون دخالت نیروی خارجی نوسان می کنند دارای ارتعاش آزادند. نوسان آونگ ساعت دیواری و یا تاب خوردن کودک، نمونه هایی از ارتعاش آزادند.

سیستم جرم-فنر که در شکل فوق نشان داده شده است، ساده ترین سیستم نوسانی است و سه مشخصه دارد:

۱- دارای یک درجه آزادی است؛ زیرا وضعیت جرم m با یک مختصه X تعیین می شود.

۲- دارای ارتعاش آزاد است؛ زیرا نیروی خارجی بر آن وارد نمی شود.

اگر مانند شکل زیر دارای میراگر باشد، دامنه حرکت آن تغییر می کند و در صورت نبودن میراگر شکل ساده تر شده و سیستم را نامیرا گویند و دامنه حرکت آن تغییر نمی کند.

$$\sum F_X = m_{eq} a_x = m_{eq} \ddot{x}$$

$$-Kx - C\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \leftarrow \text{معادله ارتعاش یک بعدی}$$

$$mr^2 + Cr + K = 0 \leftarrow \text{معادله مشخصه}$$

$$r_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mk}}{2m} \Rightarrow r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{K}{m}\right)^2}$$

$$\text{ریشه داخل رادیکال} = 0 \rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{K}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_n$$

$$\rightarrow C_c = 2m\omega_n \quad (\text{ثابت میرایی بحرانی سیستم})$$

$$\frac{\text{ثابت میرایی سیستم } C}{\text{ثابت میرایی بحرانی سیستم } C_c} = \varepsilon \quad (\text{نسبت میرایی سیستم}) \Rightarrow C = \varepsilon C_c$$

$$r_{1,2} = -\frac{\varepsilon C_c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon C_c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{K}{m}\right)^2} \Rightarrow r_{1,2} = -\varepsilon \omega_n \pm \sqrt{\varepsilon^2 \omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = -\varepsilon \omega_n \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \omega_n$$

$$r_{1,2} = -\varepsilon \omega_n \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (-1) \cdot \omega_n \quad (i = \sqrt{-1})$$

برای شرایط مختلف ریشه ها "نسبت میرایی سیستم ها:

$$\varepsilon < 1 \text{ or } C < C_c$$

$$r_{1,2} = -\varepsilon \omega_n \pm i\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cdot \omega_n$$

$$\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cdot \omega_n = \omega_d \quad (\text{فرکانس ارتعاش میرایی سیستم})$$

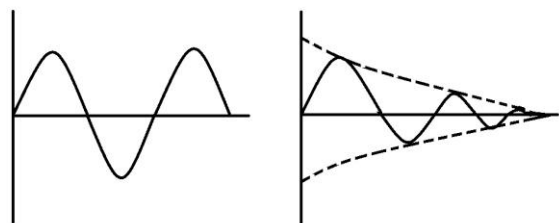
$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \Rightarrow x(t) = e^{-\varepsilon \omega_n t} [C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}]$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon \omega_n t} [C_1 (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + C_2 (\cos \omega_d t - i \sin \omega_d t)]$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon \omega_n t} [C_1' \cos \omega_d t + C_2' \sin \omega_d t] \quad \begin{cases} C_1' = C_1 + C_2 \\ C_2' = i(C_1 - C_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad \text{اعمال شرایط مرزی}$$

نسبت کاهش لگاریتمی دامنه نوسان در ارتعاشات آزاد یک بعدی با میرایی کند:



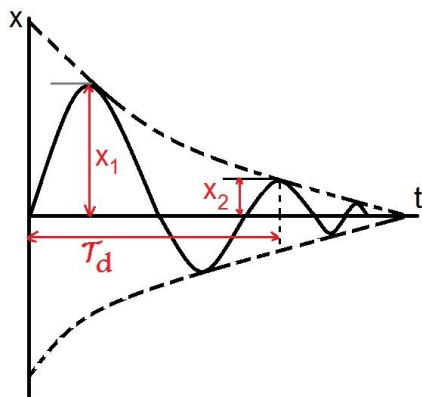
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\varepsilon\omega_n t_1} x_0 [\cos(\omega_d t_1 + \varphi_0)]}{e^{-\varepsilon\omega_n t_2} x_0 [\cos(\omega_d t_2 + \varphi_0)]} \quad \text{و} \quad t_2 = t_1 + \tau_d$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\varepsilon\omega_n t_1} [\cos(\omega_d t_1 + \varphi_0)]}{e^{-\varepsilon\omega_n (t_1 + \tau_d)} [\cos(\omega_d t_2 + \varphi_0)]}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\varepsilon\omega_n t_1} [\cos(\omega_d t_1 + \varphi_0)]}{e^{-\varepsilon\omega_n t_1} e^{-\varepsilon\omega_n \tau_d} \cos(\omega_d t_1 + 2\pi + \varphi_0)}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\varepsilon\omega_n \tau_d} \rightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} = \varepsilon\omega_n \tau_d$$

نسبت کاهش لگاریتمی دامنه نوسان:



کاهش لگاریتمی، که آهنگ کاهش دامنه ارتعاشات آزاد میرا را نشان می دهد
به عنوان لگاریتم طبیعی نسبت دو دامنه متوالی دلخواه تعریف می شود.
بنابراین پس از اندازه گیری دو دامنه متوالی دلخواه و تعیین نسبت لگاریتم طبیعی آنها،
نسبت میرایی ویسکوز را می توان بدست آورد؛
با اندازه گیری دو دامنه غیرمتوالی نیز می توان نسبت میرایی را تعیین کرد.

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} \rightarrow \delta = \varepsilon\omega_n \tau_d$$

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \delta = \ln \frac{x_3}{x_4} = \ln \frac{x_m}{x_{m+1}}$$

$$\frac{x_1}{x_m} = \frac{x_1}{x_2} * \frac{x_2}{x_3} * \dots * \frac{x_{m-1}}{x_m} \Rightarrow \ln \frac{x_1}{x_m} = \ln \frac{x_1}{x_2} * \ln \frac{x_2}{x_3} * \dots * \ln \frac{x_{m-1}}{x_m}$$

$$\ln \frac{x_1}{x_m} = (m-1)\delta \rightarrow \delta = \frac{1}{m-1} \ln \frac{x_1}{x_m}$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x_0 = 1[c'_1 * 1 + c'_2 * 0] \rightarrow c'_1 = x_0$$

$$\dot{x}(t) = (-\varepsilon\omega_n)e^{-\varepsilon\omega_n t}[c'_1 \cos \omega_d t + c'_2 \sin \omega_d t] + e^{-\varepsilon\omega_n t}[-c'_1 \cdot \omega_d \sin \omega_d t + c'_2 \cdot \omega_d \cos \omega_d t]$$

$$t = 0 \rightarrow \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_0 = -\varepsilon\omega_n * 1[c'_1 + 0] + 1 * [0 + c'_2 \omega_d] \rightarrow c'_2 = \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon\omega_n x_0}{\omega_d}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\varepsilon\omega_n t}[x_0 \cos(\omega_d t + \varphi_0)]$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon\omega_n t}[x_0 \cos(\omega_d t + \varphi)]$$

$$x_0 = \sqrt{c'^2_1 + c'^2_2} \rightarrow \varphi_0 = \text{Arc tan} \left(\frac{c'_2}{c'_1} \right)$$

$$\delta = \frac{1}{m-1} \ln \frac{x_1}{x_m} \rightarrow \delta \text{ تعیین}$$

$$\delta_0 = \varepsilon\omega_n \tau_d$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\delta}{\omega_n \tau_d} \\ \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \end{cases} \rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{\omega_d \left(\frac{2\pi}{\omega_d} \right)}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \omega_n}{\omega_n \cdot 2\pi} = \frac{\delta \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi} \rightarrow \varepsilon^2 (2\pi)^2 = \delta^2 (1-\varepsilon^2) \rightarrow \varepsilon^2 \cdot [(2\pi)^2 + \delta^2] = \delta^2$$

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} \quad \ll \text{تعیین } \varepsilon \gg$$

$$\varepsilon = \frac{c}{c_c} \rightarrow c = \varepsilon \cdot c_c \text{ و } c_c = 2m \cdot \omega_n \rightarrow \ll c = \varepsilon(2m \cdot \omega_n) \gg$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \omega_n \text{ و } :$$

$$\begin{cases} \tau_d \text{ معلوم} \\ \omega_d = \frac{2\pi}{\tau_d} \text{ معلوم} \end{cases} \rightarrow \ll \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \gg$$

$$\ll \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow K = m \cdot \omega_n^2 \gg$$

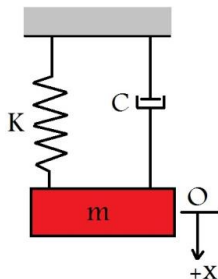
$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \omega_n}$$

$$x = \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2} \text{ و } c_1' = x_0 \text{ و } c_2' = \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon \omega_n x_0}{\omega_d}$$

$$\frac{x_3}{x_1} = 0.1 \rightarrow \delta = \frac{1}{3-1} \ln \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2} \ln 10$$

$$\delta = \ln \frac{x_2}{x_1} \rightarrow \ll \frac{x_2}{x_1} = e^\delta \gg$$

مثال) مطلوب است طراحی فنر وميراگر يك موتورسيكلت به جرم 200Kg ، به طوري كه دامنه نوسان در 0.5 سيكل به $\frac{1}{4}$ کاهش يابد و دوره ي تناوب ميرايي ارتعاشات 2Sec باشد؟



$$\frac{x_{1.5}}{x_1} = \frac{1}{4} \text{ و } \frac{x_2}{x_{1.5}} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \rightarrow \left\langle \frac{x_1}{x_2} = 16 \right\rangle$$

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln 16 = 2.7726 \rightarrow \delta = 2.7726$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} = 0.4034 < 1 \rightarrow \varepsilon = 0.4037$$

$$\tau_d = 2\text{Sec} \text{ , } \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow \omega_d = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \omega_n \rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - (0.4037)^2}} = 3.438 \rightarrow \left\langle \omega_n = 3.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right\rangle$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow K = m \omega_n^2 = 200 * (3.438)^2 = 2352 \rightarrow K = 550.08 \rightarrow c = 550.08$$

حالت ارتعاش سیستم های ارتعاش آزاد یک بعدی :

$$\xrightarrow{\text{Imp}} \text{ کند میرا : } \varepsilon < 1 \quad \langle 1 \rangle$$

$$\xrightarrow{\text{Imp}} \text{ میرایی بحرانی : } \varepsilon = 1 \quad \langle 2 \rangle \quad C = C_c \leftarrow \text{سیستم ارتعاش نکند}$$

$$\text{سیستم تند میرا : } \varepsilon > 1 \quad \langle 3 \rangle$$

نسبت ثابت میرایی به میرایی بحرانی را نسبت میرایی ویسکوز گویند.

$$\varepsilon = \frac{c}{c_c}$$

۱- سیستم کندمیرا:

فرمول کلی آن به صورت زیر می باشد که این معادله یک حرکت هارمونیک میرا را نشان می دهد.

$$x(t) = c_1 e^{(-\varepsilon + i\sqrt{1-\varepsilon^2})\omega_n t} + c_2 e^{(-\varepsilon - i\sqrt{1-\varepsilon^2})\omega_n t}$$

فرکانس زاویه ای این حرکت که آنرا فرکانس ارتعاشات میرا گویند چنین است:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \omega_n$$

ملاحظه می شود که فرکانس ارتعاشات میرا همواره کمتر از فرکانس طبیعی نامیرای ω_n است. گفتنی است که حالت کندمیرا تنها حالتی است که در آن حرکت به صورت نوسانی است.

۲- سیستم با میرایی بحرانی:

این سیستم یک حرکت نامتناوب است که در نتیجه حرکت مذکور سرانجام متوقف می شود و معادله آن به صورت زیر می باشد:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_n t}$$

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0) t] e^{-\omega_n t}$$

۳- سیستم تندمیرا:

$$x(t) = c_1 e^{(-\varepsilon + i\sqrt{\varepsilon^2-1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\varepsilon - i\sqrt{\varepsilon^2-1})\omega_n t}$$

معادله بالا نشان می دهد که شرایط اولیه سیستم هرچه باشد حرکت نامتناوب است.

از آنجا که ریشه ها منفی اند حرکت بر حسب زمان به صورت نمایی کاهش می یابد.

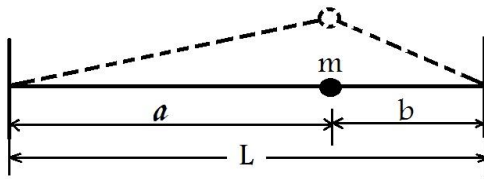
if($\varepsilon = 1$) :

$$r_{1,2} = -\varepsilon \omega_n \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} \omega_n \rightarrow r_{1,2} = -\varepsilon \omega_n$$

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt} \rightarrow x(t) = C_1 e^{-\varepsilon \omega_n t} + C_2 e^{-\varepsilon \omega_n t}$$

$$\Rightarrow x(t) = (C_1 + C_2) e^{-\varepsilon \omega_n t}$$

مثال) جرم m به یک ریسمان، با نیروی کشش T متصل است. فرض کنیم وقتی جرم در امتداد عمود بر سیستم تغییر مکان می دهد، T ثابت می ماند، فرکانس طبیعی سیستم را پیدا کنید.



$$\sum F_x = ma_x = m\ddot{x} \rightarrow -F_1 \sin\theta_1 - F_2 \sin\theta_2 = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + T(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0$$

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{l_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x}{b\sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 1}} = \frac{x}{b} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{b^2} + 1}} \xrightarrow{\frac{x}{b} \leq 1} \sin\theta_1 = \frac{x}{b}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{x}{a}$$

$$m\ddot{x} + \left[T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] x = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \frac{T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{m} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{m}}$$

فصل چهارم:

ارتعاشات اجباری هارمونیک یک بعدی:

وقتی یک سیستم تحت تاثیر برانگیزش خارجی نوسان می کند دارای ارتعاش واداشته هست. این برانگیزش می تواند هارمونیک یا غیر هارمونیک، متناوب، غیر متناوب یا تصادفی باشد
پاسخ به یک سیستم برانگیزش هارمونیک را پاسخ هارمونیک می گویند. پاسخ یک سیستم به برانگیزش نامتناوبی که به طور ناگهانی اعمال می شود و ممکن است بلند مدت یا کوتاه مدت باشد پاسخ گذرا گویند
اگر فرکانس برانگیزش با فرکانس طبیعی سیستم برابر باشد پاسخ سیستم بسیار بزرگ می شود که به این حالت تشدید گویند که باعث شکست سیستم می شود و باید از آن جلوگیری کرد.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$\sum F_x = ma_x = m\ddot{x} \rightarrow F(t) - F_K - F_C = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow F_0 \cos \omega t - Kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

حل معادله ی دیفرانسیل :

معادله خطی مرتبه دوم - غیر همگن:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

معادله همگن :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$x_c(t) = C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t$$

پاسخ خصوصی:

$$x_p(t) = t^r (x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t)$$

$$x_p(t) = x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t \rightarrow x_p(t) = x \cos(\omega t - \varphi)$$

حل پاسخ خصوصی :

$$x_p(t) = x \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{x}_p(t) = -x \omega \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -x \omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

در معادله قرار می دهیم:

$$-m\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - c\omega \sin(\omega t - \varphi) + Kx \cos(\omega t - \varphi) = F_0 \cos \omega t$$

$$-m\omega^2 [\cos\omega t \cdot \cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi] - c\omega [\sin\omega t \cdot \cos\varphi - \cos\omega t \cdot \sin\varphi] + Kx [\cos\omega t \cdot \cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi] = F_0 \cos \omega t$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 \cos\varphi + c\omega \sin\varphi + Kx \cos\varphi = F_0 \cos \omega t \\ -m\omega^2 \sin\varphi - c\omega \cos\varphi + Kx \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x[(K - m\omega^2)\cos\varphi + c\omega \sin\varphi] = F_0 & *1 \\ x[(K - m\omega^2)\sin\varphi - c\omega \cos\varphi] = 0 & *2 \end{cases}$$

$$*2 \rightarrow \tan\varphi = \frac{c\omega}{(K - m\omega^2)} \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{(K - m\omega^2)}\right)$$

$$\begin{cases} (K - m\omega^2)\cos\varphi + c\omega \sin\varphi = \frac{F_0}{x} \\ (K - m\omega^2)\sin\varphi - c\omega \cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi + B\sin\varphi = L & *3 \\ A\sin\varphi = B\cos\varphi \end{cases}$$

$$*3 \text{ به توان دو} \rightarrow A^2 \cos^2\varphi + B^2 \sin^2\varphi + 2AB \sin\varphi \cdot \cos\varphi = L^2$$

$$A^2(1 - \sin^2\varphi) + B^2(1 - \cos^2\varphi) + 2AB \sin\varphi \cdot \cos\varphi = L^2$$

$$A^2 + B^2 - A^2 \sin^2\varphi - B^2 \cos^2\varphi + 2AB \sin\varphi \cdot \cos\varphi = L^2$$

$$\therefore A^2 + B^2 = L^2 \rightarrow (K - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2 = \left(\frac{F_0}{x}\right)^2$$

$$\rightarrow x = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2}}$$

$$x = \frac{F_0}{K \sqrt{\left(1 - \frac{m}{K}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{C}{K}\omega\right)^2}}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \frac{m}{K} = \frac{1}{\omega_n^2} \\ \varepsilon = \frac{C}{C_c} \rightarrow C = \varepsilon C_c \\ C = \varepsilon(2m\omega_n) \\ \frac{C\omega}{K} = \frac{\varepsilon(2m\omega_n)\omega}{K} = 2\varepsilon \left(\frac{\omega_n \cdot \omega}{\omega_n^2} \right) = 2\varepsilon \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = 2r\varepsilon \rightarrow \frac{C\omega}{K} = 2r\varepsilon \end{cases}$$

پدیده ضریان:

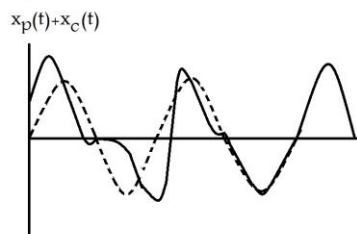
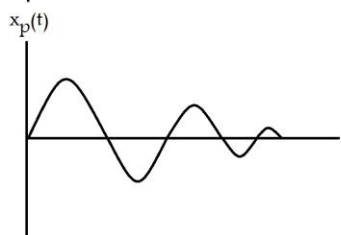
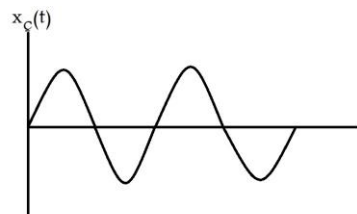
اگر فرکانس برانگیزش و فرکانس طبیعی یک سیستم تقریباً باهم برابر باشند ممکن است پدیده ضریان روی دهد ، در این پدیده دامنه نوسان بصورت منظم افزایش و کاهش می یابد.

نسبت فرکانس سیستم $\frac{\omega}{\omega_n} = r$

$$x = \frac{\frac{F_0}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{C\omega}{K}}{\left(1 - \frac{m}{K}\omega^2\right)} \right) \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r\varepsilon}{(1-r^2)} \right)$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$



$$x_p(t) = x \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x_c(t) = C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t$$

C_1 و C_2 از شرایط مرزی مسئله تعیین میشوند:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

تشدید در سیستم های ارتعاش اجباری یک بعدی:

$$x_p(t) = x \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}, \quad \delta_{st} = \frac{F_0}{K}, \quad \frac{\omega}{\omega_n} = r$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} x_p(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} x_p(t) = \left(\frac{\delta_{st}}{2\varepsilon} \right) \cos \omega t$$

ε (میراگر) مانع از ایجاد رزونانس یا تشدید در سیستم می شود.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t, \quad x = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

$$\begin{cases} \text{if } \varepsilon > 0 : \text{for } r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \rightarrow \frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{2\varepsilon} \\ \omega \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \frac{C}{C_0} \\ \text{if } \varepsilon = 0 : \rightarrow \frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-r^2} \end{cases}$$

نکته: در سیستم ارتعاش اجباری یک بعدی تشدید زمانی ایجاد می شود که میراگر از سیستم حذف شود. به روابط فوق توجه فرمایید.

حالت بدون میراگر: « $\varepsilon = 0$ »

$$m\ddot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_c + x_p(t)$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + x \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 \rightarrow x = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)}} \rightarrow x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st}}{1-r^2} \cos \omega t \\ C = 0 \rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

C_1 , C_2 از شرایط مرزی سیستم هستند

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \rightarrow x_0 = C_1 + 0 + \frac{\delta_{st}}{1-r^2} * 1 \rightarrow C_1 = x_0 - \frac{\delta_{st}}{1-r^2}$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}(t) = -C_1 \omega_n \sin \omega_n t + C_2 \omega_n \cos \omega_n t - \frac{\delta_{st}}{1-r^2} \omega \sin \omega t$$

$$x_0 = C_2 \omega_n \rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

C_1 و C_2 را در معادله قرار می دهیم .

$$x(t) = (x_0 - \frac{\delta_{st}}{1-r^2}) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st}}{1-r^2} \cos \omega t$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{x_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1-r^2} \right] \cdot \delta_{st}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{x_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \frac{0}{0} \delta_{st} \text{ حالت مبهم}$$

$$\omega = \omega_n \text{ یا}$$

$$H : \text{هوپییتال} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{x_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \delta_{st} \left(\frac{-t \sin \omega t - 0}{1 - \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)(2\omega)} \right) \\ \omega \rightarrow \omega_n \end{cases}$$

$$\ll x(t) = \left[x_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{x_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t \right] + \delta_{st} \frac{t \omega_n}{2} \sin \omega t \gg$$

در رابطه ی بالا عبارت اولی $x_c(t)$ و عبارت دومی $x_p(t)$ است.

ضریب بزرگنمایی:

کمیت $\frac{x}{\delta_{st}}$ را که نسبت دامنه دینامیکی به دامنه استاتیکی است ضریب بزرگنمایی یا نسبت دامنه گویند که آن را با حرف M نشان می

$$M_{Max} = \left(\frac{x}{\delta_{st}}\right)_{Max}$$

دهند و تغییرات آن بر حسب $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ نشان داده می شود.

۱- اگر $0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$ در این حالت پاسخ هارمونیک سیستم و نیروی برانگیزش همفازند.

۲- اگر $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ پاسخ سیستم و نیروی برانگیزش به اندازه ۱۸۰ درجه اختلاف فاز دارند یعنی دامنه پایدار تقریباً صفر است.

۳- اگر $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ پاسخ سیستم در حالت تشدید است.

مثال- در سیستم ارتعاش اجباری هارمونیک مقادیر سیستم (m, k, c) معلوم است، می خواهیم بدانیم M یا (x) به ازای چه مقداری

از r حداکثر می شود و حداکثر یعنی M_{Max} یا (x_{Max}) چقدر است ؟

$$\frac{dM}{dr} = 0 \rightarrow \frac{0 - \frac{[2(1-r^2)(-2r) + (2\varepsilon)^2 \cdot (2r)]}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}}{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2} = 0$$

$$2(1-r^2)(2r) = (2\varepsilon)^2 \cdot (2r) \rightarrow (1-r^2) = 2\varepsilon^2$$

$$\rightarrow r^2 = 1 - 2\varepsilon^2 \rightarrow r = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$$

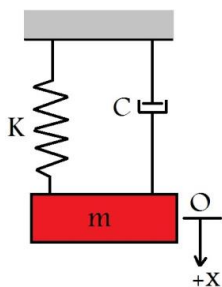
به ازای $r = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$ مقدار M یا (x) حداکثر می شود با شرط :

$$1 - 2\varepsilon^2 \geq 0 \rightarrow 2\varepsilon^2 \leq 1 \rightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varepsilon \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varepsilon \leq 0.707$$

سوال : اگر $\varepsilon > 0.707$ باشد چه اتفاقی می افتد ؟

جواب : سیستم اکستریم ندارد .

باجگذاری $r = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$ داریم :



$$M_{Max} = \left(\frac{x}{\delta_{st}}\right)_{Max} = \frac{1}{\sqrt{(1-(1-2\varepsilon^2))^2 + 4(1-2\varepsilon^2)\varepsilon^2}}$$

$$M_{\text{Max}} = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2 - 8\varepsilon^4}} = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon^2 - 4\varepsilon^4}} \rightarrow M_{\text{Max}} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

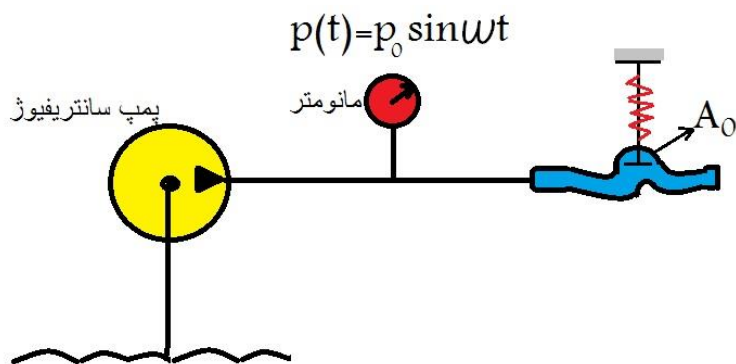
کاربرد عملی در صنعت :

$$\delta_{\text{st}} = \frac{F_0}{K}$$

بدست میاید $\varepsilon \rightarrow M_{\text{Max}}$ اندازه گیری

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{C}{2\sqrt{K \cdot m}} \rightarrow C = 2\sqrt{K \cdot m} \cdot \varepsilon$$

مثال : پاسخ پایدار سیستم ارتعاش نشان داده شده (ارتعاش نشینمگاه شیر) را بدست آورید؟



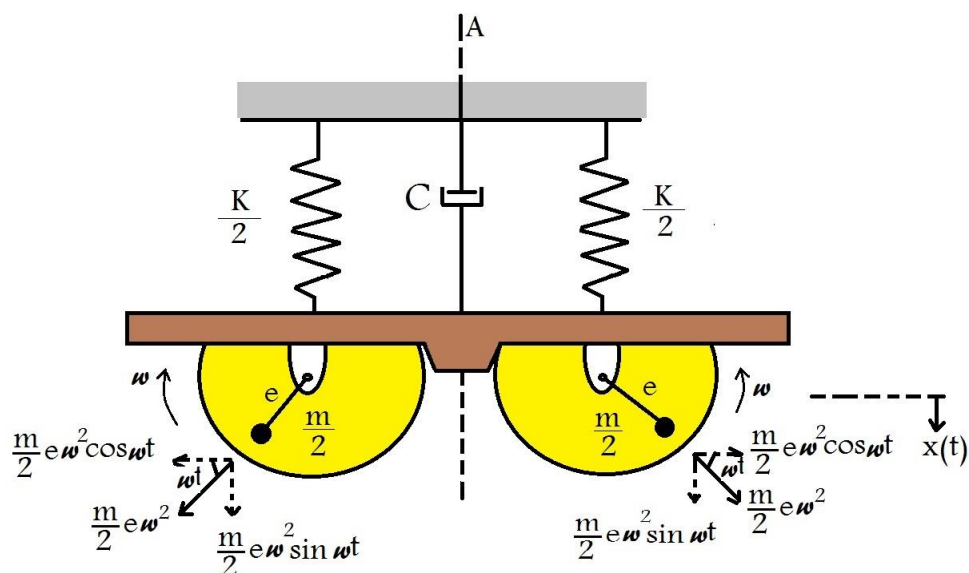
$$P(t) = P_0 = \text{cte}$$

$$\frac{x}{\delta_{\text{st}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \xrightarrow{\varepsilon=0} x = \frac{\delta_{\text{st}}}{1-r^2}, \quad \delta_{\text{st}} = \frac{F_0}{K}$$

$$\rightarrow x = \frac{\frac{F_0}{K}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{P_0 A_0}{K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}, \quad A = \frac{\pi D_0^2}{4}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m_{\text{eq}}}} \quad *1, \quad m_{\text{eq}} = m_v + \frac{1}{3}m_s \quad *2 \quad \xrightarrow{*1, *2} \omega_n \text{ معلوم} \Rightarrow x \text{ بدست آید می}$$

$$\Rightarrow x_p = x \sin \omega t$$



نامیزانی در ماشین های دوار یکی از عوامل اصلی ارتعاشات است در شکل مدل ساده یک ماشین نامیزان را نشان داده ، جرم کل ماشین M است و دو جرم خارج مرکز با سرعت زاویه ای ثابت ω در جهت های مخالف می چرخند نیروی سانتریفیوژ $\frac{me\omega^2}{2}$ برای جرم M به عنوان برانگیزش خارجی محسوب می شود و در جهات مخالف می چرخد ، مولفه های افقی نیروی مذکور یکدیگر را خنثی می کنند اما مولفه های عمودی باهم جمع می شوند و در امتداد محور تقارن اثر می کنند براینده این مولفه عمودی با رابطه $F=me\omega^2 \sin \omega t$ بیان می شود.

$M_0 \leftarrow$ جرم کل سیستم ارتعاشی

$m \leftarrow$ (جرم خارج از مرکز) جرم بالانس نشده

$F_c \leftarrow$ نیروی گریز از مرکز

$$\sum F_{\tau} = M_0 a_{\tau}$$

$$F_{\frac{C\tau}{2}} - F_{\frac{C\tau}{2}} = M_0 a_{\tau} \rightarrow \ll a_{\tau} = 0 \gg$$

$$\sum F_{\tau} = M_0 a_{\tau} = M_0 \ddot{x}$$

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F_{Cx} \sin \omega t$$

$$F_{Cx} = F_0 \sin \omega t$$

$$F_0 = m e \omega^2$$

θ	0	90°
$\frac{F_{Cx}}{F_0}$	0	1

معادله ی ارتعاش: $M_0 \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = m e \omega^2 \sin \omega t$

x_C = فصل دوم

$$x_p(x) = x \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} = \frac{\frac{m e \omega^2}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{C}{C_c}, \quad \frac{\omega}{\omega_n} = r$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r\varepsilon}{(1-r^2)^2} \right) \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M_0}} \quad \rightarrow \quad K = M_0 \omega_n^2$$

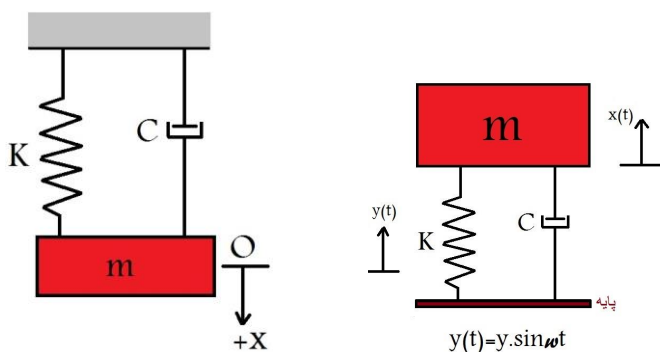
$$\frac{x M_0}{m.e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_0 \leftarrow \text{جرم کل ارتعاش} \\ m \leftarrow \text{جرم خارج از مرکز} \\ e \leftarrow \text{فاصله خارج از مرکزیت} \end{array} \right.$$

$$X = \frac{\frac{m e \omega^2}{M_0 \omega_n^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

انتقال پذیری در سیستم های ارتعاشی یک بعدی (سیستم های ارتعاشی با پایه ی واداشتی) :

وقتی پایه یک سیستم حرکت می کند بر اثر واکنش فنر و کمک فنر ، نیروی F به آن منتقل می شود که به آن نیروی انتقال یافته گویند گفتنی است که نیروی انتقال یافته و حرکت جرم هم فاز هستند

$$\text{نیروی انتقال یافته} = \frac{FT}{KY}$$



$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = Y \sin \omega t$$

$$\sum F_x = M a_x = M \ddot{x}$$

$$-K(x - y) - C(\dot{x} - \dot{y}) = M \ddot{x}$$

$$M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = C\dot{y} + Ky$$

$$\begin{cases} y = Y \sin \omega t \\ \dot{y} = Y\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = CY\omega \cos \omega t + KY \sin \omega t & \text{رابطه (1)} \\ M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = A \sin (\omega t - \alpha) & A \text{ دامنه است} \\ A \sin (\omega t - \alpha) = A[\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha] & \text{رابطه (2)} \end{cases}$$

چون طرف دوم رابطه های (۱) و (۲) باهم برابر است ، نتیجه می گیریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cos \alpha = KY \\ -A \sin \alpha = CY\omega \end{cases}$$

$$\tan \alpha = -\frac{CY\omega}{KY} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{-C\omega}{K} \right)$$

به توان ۲ :

$$A^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = (Ky)^2 + (CY\omega)^2 \Rightarrow$$

$$A = Y\sqrt{K^2 + (C\omega)^2}$$

$$M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = A \sin(\omega t - \alpha)$$

$$A = Y\sqrt{K^2 + (C\omega)^2}, \quad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{-C\omega}{K} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{C}{C_c} \Rightarrow C = \varepsilon C_c \Rightarrow C_c = 2m\omega_n$$

$$\frac{x}{Y} = \frac{1 - (2r\varepsilon)^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \Rightarrow \frac{x}{Y} = \left[\frac{1 + 2r\varepsilon}{(1 - r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$x_p(t) = x \sin(\omega t - \varphi)$$

$$M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = A \sin(\omega t - \alpha)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r\varepsilon}{(1 - r^2)} \right), \quad \alpha = \tan^{-1}(-2r\varepsilon)$$

$$x_p(t) = x \sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow \varphi = \alpha + \psi$$

در پایه واداشتی :

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r\varepsilon}{(1 - r^2)} \right) - \tan^{-1}(-2r\varepsilon)$$

خلاصه:

$$M \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = A \sin(\omega t - \alpha)$$

$$A=Y\sqrt{K^2 + (C\omega)^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-2r \varepsilon)$$

پاسخ: $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

در این رابطه $x_c(t)$ پاسخ همگن (گذرا) و $x_p(t)$ پاسخ پایدار سیستم (پاسخ خصوصی) است

$$x_p(t) = x \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{x}{Y} = \left[\frac{1+2r \varepsilon}{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r \varepsilon}{(1-r^2)} \right) - \tan^{-1}(-2r \varepsilon)$$

y: حداکثر جابجایی پایه

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r \varepsilon}{(1-r^2)} \right) - \tan^{-1}(-2r \varepsilon)$$

X: حداکثر جابجایی پایدار بن جرم

$$T_d = \frac{x}{Y} \Rightarrow \left[\frac{1+(2r \varepsilon)^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2}} \right]^2 < 1$$

$$\frac{1+(2r \varepsilon)^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2}} < 1 \Rightarrow 1 + (2r \varepsilon)^2 < (1 - r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2$$

$$\Rightarrow (1 - r^2)^2 > 1 \Rightarrow -1 > 1 - r^2 > 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - r^2 > 1 \Rightarrow r^2 < 0 & \text{غ ق ق} \\ 1 - r^2 < -1 \Rightarrow r^2 > 2 \Rightarrow r > \sqrt{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

نکات :

$$\begin{cases} (1) \text{for } : r > \sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon / T_d < 1 \\ (2) \text{if } \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{بدون فراگیر} \end{cases}$$

$$T_d = \frac{x}{Y} = \frac{1}{1 - r^2}$$

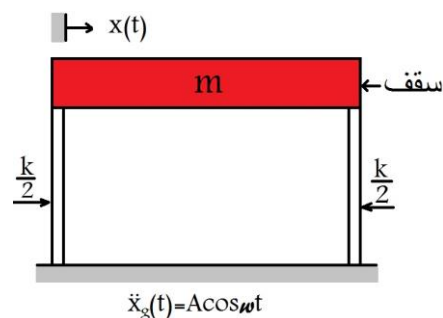
$$\lim_{r \rightarrow 1} T_d = \infty$$

مثال : فونداسیون سازه به صورت هارمونیک تحت زمین لرزه قرار می گیرد ، دامنه ارتعاش پایدار سقف را بدست آورید .

$$\sum F_{\tau} = m\ddot{x} = -K(x - y)$$

$$m\ddot{x} + K(x - y) = 0 \rightarrow m\ddot{x} + Kx = Ky \quad *1$$

$$a_y = \ddot{y} = A \cos \omega t$$



$$V_y = \text{انتگرال گیری} \rightarrow \dot{y}(t) = +\frac{A}{\omega} \sin \omega t + C_1$$

$$\text{انتگرال گیری} \rightarrow y(t) = -\frac{A}{\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_2$$

$$t = 0 \rightarrow \dot{y}(t) = y(t) = 0 \quad \text{اعمال شرایط مرزی}$$

$$t = 0 \xrightarrow{y(t)} -\frac{A}{\omega^2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{A}{\omega^2}$$

$$t = 0 \xrightarrow{\dot{y}(t)} C_1 = 0$$

$$\text{داریم: } y(t) = -\frac{A}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{A}{\omega^2} \quad *2$$

$$\xrightarrow{*1, *2} m\ddot{x} + Kx = -\frac{KA}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{KA}{\omega^2}$$

$$1) m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (\text{جواب معادله همگن فصل 2})$$

برای حل بخش خصوصی از اصل جمع آثار (Super Position) استفاده می کنیم:

$$2) x_{p1}(t) = ?$$

$$x_{p1}(t) = x \cos(\omega t - \varphi) \quad , \quad \varepsilon = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

$$\frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \xrightarrow{\varepsilon=0} \frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-r^2}$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{K} \xrightarrow{\text{Analogy}=F_0=-\frac{KA}{\omega^2}} \delta_{st} = \frac{-\frac{KA}{\omega^2}}{K} = -\frac{A}{\omega^2}$$

$$x_{p1}(t) = x \cos(\omega t) \quad \text{و} \quad x = \frac{\frac{-A}{\omega^2}}{1-r^2} = \frac{-A}{\omega^2(1-r^2)}$$

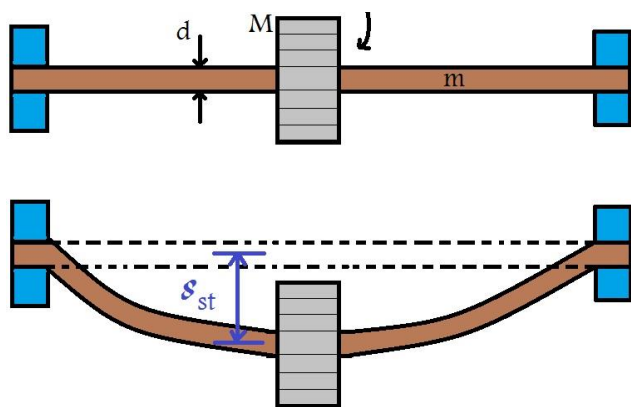
3) $x_{p2}(t) = C \rightarrow$ در معادله صدق می کند

$$m\ddot{x} + Kx = \frac{KA}{\omega^2} \quad (x_{p2}(t) = C \rightarrow \dot{x}_{p2}(t) = \ddot{x}_{p2}(t) = 0)$$

$$m(0) + K(C) = \frac{KA}{\omega^2} \rightarrow C = \frac{A}{\omega^2}$$

$$\therefore x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t) \Rightarrow x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

مثال) پره توربین خیلی بزرگ با جرم M بر روی یک شفت تو پر به قطر d نصب شده است. دو سر شفت در دو طرف یاتاقان نصب شده. محدوده سرعت توربین را طوری تعیین کنید که حداکثر خیز (جابه جایی) شفت در حالت دینامیکی 0.1 حالت استاتیکی باشد. $\frac{m}{M} \ll 1$



$$\delta_{st} = \frac{Mg}{K}, \quad \delta_{st} = \frac{Mgl^3}{48EI}$$

$$\frac{x}{\delta_{st}} \leq 0.1$$

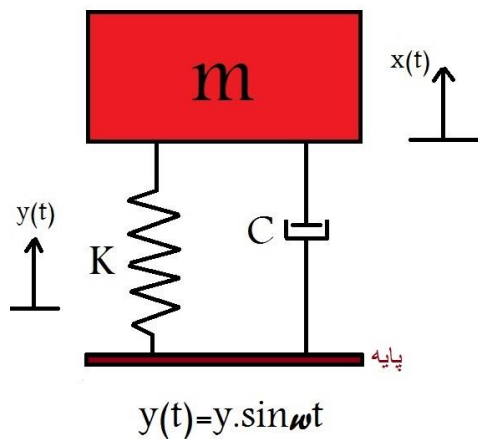
$$\frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\epsilon)^2}} = \frac{1}{|1-r^2|}$$

$$\frac{x}{\delta_{st}} \leq 0.1 \Rightarrow \frac{1}{|1-r^2|} \leq 0.1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جواب ندارد} \quad r^2 \leq -9 \\ 1 - r^2 \leq -10 \rightarrow r^2 \geq 11 \rightarrow r \geq 3.3 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} \geq 3.3 \end{array} \right.$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{48EI}{l^3}}{M_T + \frac{m}{2}}} \Rightarrow \omega_n \geq 3.3 \sqrt{\frac{48}{l^3(M_T + \frac{m}{2})}}$$

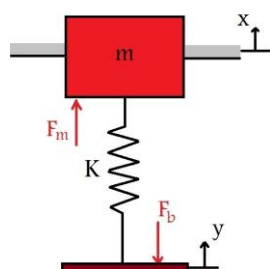
سیستم ارتعاشی اجباری یک بعدی با پایه برانگیخته:



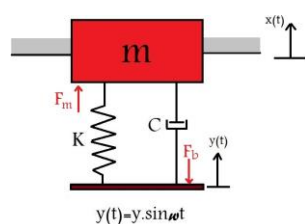
گاهی پایه یک سیستم دستخوش حرکت هارمونیک می شود. مطابق شکل، تغییر مکان پایه را با $y(t)$ و تغییر مکان جرم از وضعیت تعادل استاتیکی را با $x(t)$ نشان می دهیم. در این صورت تغییر مکان فنر برابر است با $x - y$ و سرعت نسبی بین دو سر میران عبارت است از $\dot{x} - \dot{y}$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

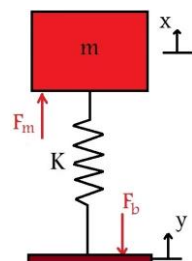
نیروهای وارد بر پایه:



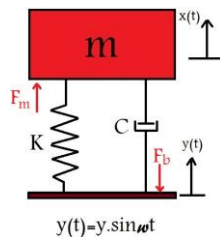
$$1) \begin{cases} F_m = +Ky \\ F_b = -Ky \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} F_m = +Ky + C\dot{y} \\ F_b = -(Ky + C\dot{y}) = -F_m \end{cases}$$



$$3) \begin{cases} F_m = +K(y - x) \\ F_b = -K(y - x) = -F_m \end{cases}$$



$$4) \begin{cases} F_m = m\ddot{x} \\ F_b = -F_m = -m\ddot{x} \\ F_b = -m\ddot{x}(t) \end{cases}$$

$$F_b = -F_m = (Kx + C\dot{x}) - (Ky + C\dot{y})$$

$$\begin{cases} x(t) = x \sin (\omega t - \varphi) \\ \dot{x}(t) = x\omega \cos (\omega t - \varphi) \\ \ddot{x}(t) = -x\omega^2 \sin (\omega t - \varphi) \end{cases} \Rightarrow F_b = mx\omega^2 \sin (\omega t - \varphi)$$

میزان انتقال پذیری $T_F = \frac{F_T}{K_y} \rightarrow T_F = \frac{mx\omega^2}{K_y}$

$$T_F = \frac{mx\omega^2}{K_y} = \left(\frac{m}{K}\right) \left(\frac{x}{y}\right) \omega^2$$

$$T_F = \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right) (T_d) \omega^2$$

$$T_F = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot T_d \rightarrow \frac{T_F}{T_d} = r^2$$

$$T_F = r^2 \left[\frac{1+(2r \varepsilon)^2}{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

فصل پنجم :

سیستم های ارتعاشی با یک درجه آزادی تحت تاثیر یک برانگیزش کلی

الف) تحت تاثیر یک نیروی متناوب

ب) تحت تاثیر یک نیروی غیر تناوبی

نیروهای متناوب و نامنظم:

در این فصل پاسخ سیستم با یک درجه آزادی را که تحت یک برانگیزش کلی است، بررسی می نماییم. این برانگیزش ممکن است متناوب یا نامتناوب باشد. برانگیزش نامتناوب ممکن است کوتاه مدت، بلند مدت یا دائمی باشد. اگر مدت اعمال برانگیزش در مقایسه با دوره تناوب طبیعی سیستم کوچک باشد برانگیزش را شوک گویند.

اگر سیستم تحت برانگیزش نامتناوب ناگهانی قرار گیرد پاسخ آن شامل ارتعاشات گذرا نیز خواهد بود؛ در این حالت پاسخ گذرا را با استفاده از انتگرال کانولوشن می توان بدست آورد.

گاهی نیروی وارد بر یک سیستم به صورت نامنظم ولی متناوب است و عبارت تحلیلی برای آن وجود ندارد، مانند نیروی باد یا زلزله. در این موارد با آزمایش، نیروی نامنظم را به صورت ترسیمی بدست می آورند.

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = F_0 \cos \omega t$$

سری فوریه

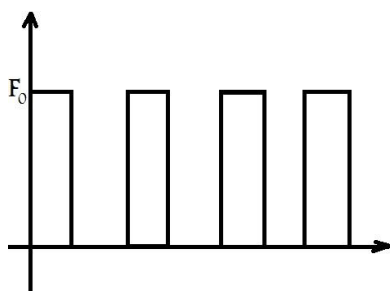
سری فوریه تابع متناوب $x(t)$ با دوره تناوب τ چنین است.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

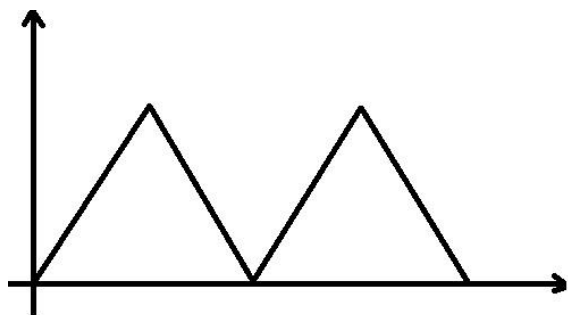
که در آن $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ فرکانس اصلی است و a_n و b_n ضرایب ثابتند.

سری فوریه را می توان فقط بر حسب جمله های سینوسی یا کسینوسی نوشت.

پدیده گیبس: وقتی یک تابع متناوب را با سری فوریه نشان می دهیم یک رفتار ناممعلوم از آن مشاهده می شود، مانند موج مثلثی.



$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



$$F(t) = \begin{cases} 2F_0 \left(\frac{t}{T}\right) & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 2F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

معادله حاکم بر سیستم:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$$

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos j\omega t dt$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin j\omega t dt$$

نکات مهم:

❖ مقدار $\frac{a_0}{2}$ برابر با مقدار متوسط تابع $F(t)$ در یک پریود است.

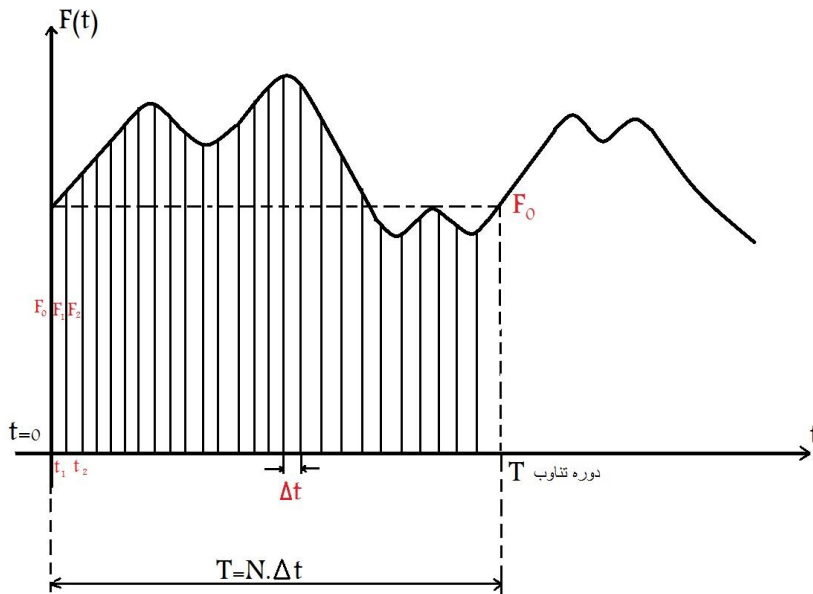
❖ اگر تابعی فرد باشد سری فوریه ی آن نیز فرد است.

یعنی:

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = 0 \\ a_j = 0 \end{cases}$$

❖ اگر تابعی زوج باشد سری فوریه ی آن نیز زوج خواهد بود.

یعنی: $b_j = 0$



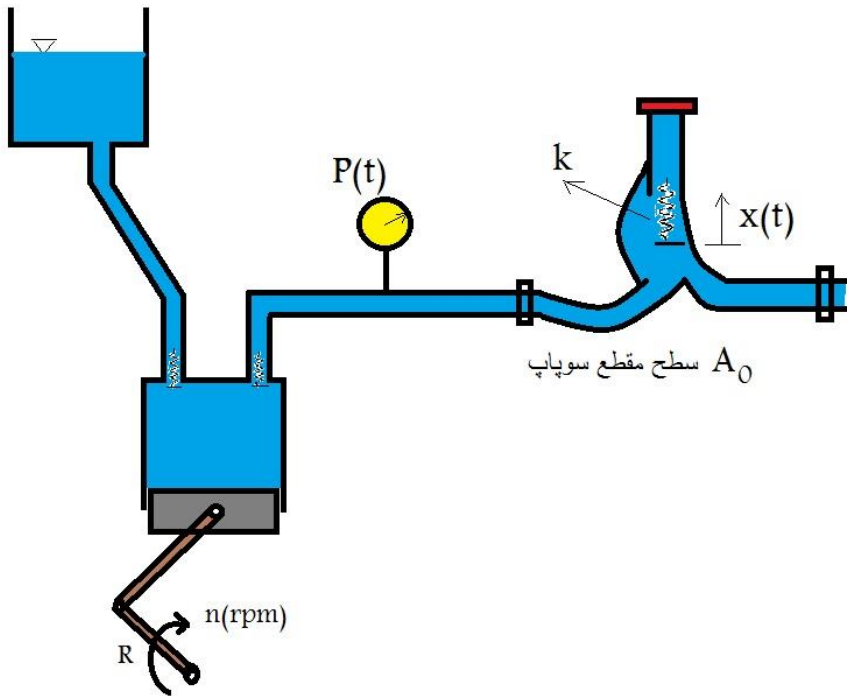
$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{2}{(N\Delta t)} \sum_{i=1}^N F_i(\Delta t) \Rightarrow a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos j\omega t dt = \frac{2}{(N\Delta t)} \sum_{i=1}^N F_i \cos j\omega t (\Delta t) \Rightarrow a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos j\omega t$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin j\omega t$$

مثال) یک پمپ تک پیستونه که تولید فشار می کند داریم و با این فرم می خواهیم معادله ی جابه جایی دریچه ی شیر را بنویسیم.
($T=2\text{sec}$)



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

$$F(t) = P(t)A_0 = \begin{cases} (P_0A_0)t & 0 \leq t < 1 \\ P_0A_0(2-t) & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1/2(P_0A_0 \cdot 2)}{2} = 1/2 \cdot 1/2 (P_0A_0)$$

مقدار متوسط تابع در پریود

$$b_j = 0 \text{ تابع زوج}$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos j\omega t dt = \frac{2}{2} \int_0^2 F(t) \cos j\omega t dt$$

$$a_j = \left[\int_0^1 (P_0A_0)t \cos j\pi t dt + \int_1^2 P_0A_0(2-t) \cos j\pi t dt \right]$$

$$a_j = \left[P_0A_0 \int_0^1 t \cos j\pi t dt + 2 \int_1^2 \cos j\pi t dt - \int_1^2 t \cos j\pi t dt \right]$$

$$I_1 = \left[t \frac{1}{j\pi} \sin j\pi t + \frac{1}{(j\pi)^2} \cos j\pi t \right]_0^1 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{j\pi} \sin j\pi t$$

$$F(t) \sim \frac{1}{2} P_0 A_0 + a_1 \cos \pi t + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 3\pi t + \dots$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \pi t + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 3\pi t + \dots$$

حل از روش جمع آثار:

$$\begin{cases} 1) m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \rightarrow x_c(t) \\ 2) m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = \frac{a_0}{2} \rightarrow x_{p1}(t) \\ 3) m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = a_1 \cos \pi t \rightarrow x_{p2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

$$\therefore x(t) \cong x_c(t) + x_{p1}(t) + x_{p2}(t) + \dots$$

$$2) m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = \frac{a_0}{2} \rightarrow x_p(t) \begin{cases} x_p'(t) = 0 \\ x_p''(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow m(0) + C(0) + KC_1 = \frac{a_0}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{a_0}{2K} \Rightarrow$$

$$x_{p1}(t) = \frac{a_0}{2K}$$

$$3) m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 \cos \pi t$$

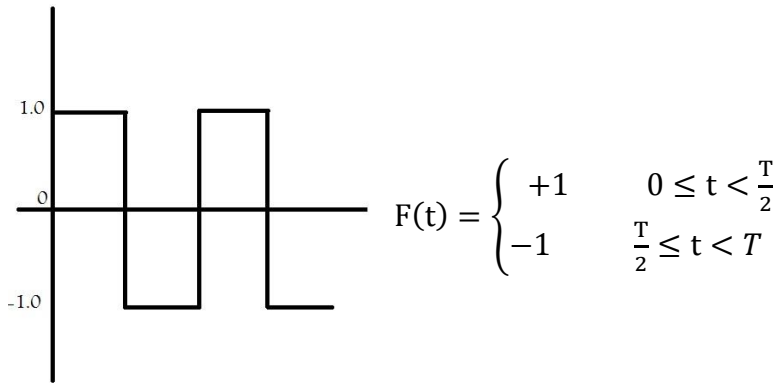
$$x_p(t) = x \cos(\pi t - \varphi)$$

$$\frac{x}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \Rightarrow x = \frac{\frac{F_0}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

$$\xrightarrow{F_0=a_1} x_2 = \frac{\frac{a_1}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2r\varepsilon}{1-r^2} \right)$$

$$x(t) \equiv x_c(t) + \frac{a_0}{2K} + x_1 \cos(\pi t - \varphi_1) + x_2 \cos(\pi t - \varphi_2) + \dots$$



$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t)$$

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = 0 \\ a_j = 0 \end{cases} \text{ تابع فرد است}$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin j\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin j\omega t dt$$

$$b_j = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \sin j\omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} (+1) \sin j\omega t dt \right]$$

$$b_j = \frac{2}{T} \left[\frac{1}{j\omega} \cos j\omega t \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left(\frac{-1}{j\omega} \right) \cos j\omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right]$$

$$b_j = \frac{2}{T} \left(\frac{1}{j\omega} \right) \left[\{ (1 - \cos j\omega T/2) - (\cos j\omega T/2 - 1) \} \right]$$

$$\begin{cases} j\omega \frac{T}{2} \rightarrow j \left(\frac{2\pi}{T} \right) \frac{T}{2} = j\omega \rightarrow j\omega \frac{T}{2} = j\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$$b_j = \frac{2}{T} \left(\frac{2}{j\omega} \right) [1 - \cos j\omega T/2]$$

$$b_j = \frac{2}{j\pi} \begin{cases} 2 & j = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & j = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{2}{1 \cdot \pi} * 2 = \frac{4}{\pi} \\ b_2 = 0 \\ b_3 = \frac{2}{3 \cdot \pi} * 2 = \frac{4}{3\pi} \\ b_4 = 0 \\ b_5 = \frac{2}{5 \cdot \pi} * 2 = \frac{4}{5\pi} \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sin \omega t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

$$F_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin \omega t$$

$$x_1(t) = x_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$$

$$\frac{x_1}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2}} \rightarrow x_1 = \frac{\frac{F_0}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{Analogy}} x_1 = \frac{\frac{4}{K\pi}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r \varepsilon)^2}}, \quad \varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2r \varepsilon}{1-r^2} \right)$$

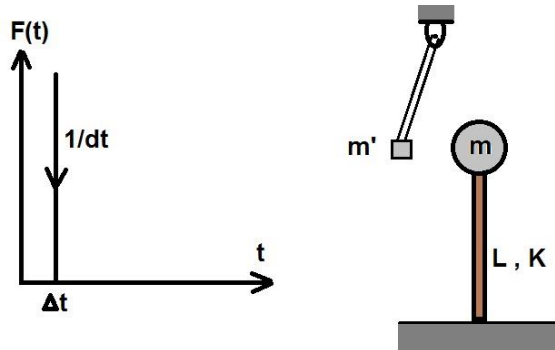
$$x_3(t) = x_3 \sin(\omega t - \varphi_3)$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{\frac{4}{3K\pi}}{\sqrt{(1-(3r)^2)^2 + (2(3r) \varepsilon)^2}} \\ \varphi_3 = \tan^{-1} \left(\frac{2(3r) \varepsilon}{1-(3r)^2} \right) \end{cases}$$

$$x_3(t) = x_3 \sin(3\omega t - \varphi_3)$$

$$\therefore x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots$$

اثر ضربه در سیستم های ارتعاش یک بعدی:



الف) اثر ضربه منفرد

ب) اثر ضربات متوالی

$$K = \frac{3EI}{l^3}$$

$\delta(t)$: تابع ضربه واحد

$$\int_0^{\infty} F(t)dt = \int_0^{\Delta t} F(t)dt + \int_{\Delta t}^{\infty} (0)dt \rightarrow \int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t}\right) dt = 1 \quad \text{تابع ضربه واحد}$$

سطح زیر نمودار F-t برابر واحد است:

$$F\Delta t = m\Delta V \quad (\text{تغییر ممنتوم جسم}) \quad (\text{ضربه})$$

$$\int_0^{\Delta t} Fdt = m\Delta V \rightarrow 1 = m(\dot{x}_{0+} - \dot{x}_{0-}) \quad \begin{cases} \text{قبل ضربه : منفی} \\ \text{بعد ضربه : مثبت} \end{cases}$$

$$\rightarrow 1 = m\dot{x}_0 \Rightarrow \dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = \frac{1}{m}$$

مدل کردن ضربه واحد به فرم سرعت اولیه:

$$\begin{cases} x_0 = x(t=0) = 0 \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = \frac{1}{m} \end{cases} \quad (\text{شرایط اولیه ضربه منفرد})$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad \xrightarrow{\text{با شرایط}} \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$$

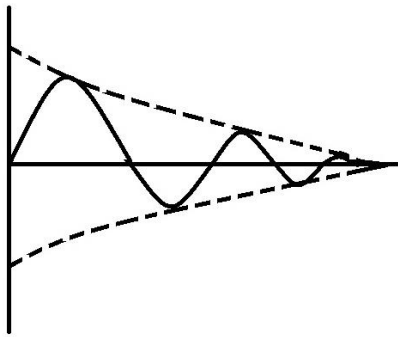
ضربه را به دو صورت در نظر می گیریم:

- نیروی Δt
- تغییر ممنتوم (سرعت اولیه)

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$$

سیستم کند میرا : $\varepsilon < 1 \Rightarrow$ با توجه به $\varepsilon \rightarrow$ حل معادله

با توجه به مشاهدات فیزیکی در طبیعت:



$$x(t) = x_0 e^{-\varepsilon \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi_n)$$

$$x_0 = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}, \quad \varphi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{-C_2'}{C_1'} \right)$$

$$\begin{cases} C_1' = x_0 \Rightarrow C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon \omega_n x_0}{\omega_d} = \frac{\frac{1}{m} + 0}{\omega_d} \\ C_1' = 0 \Rightarrow C_2' = \frac{1}{m \omega_d} \Rightarrow x_0 = C_2' \end{cases}$$

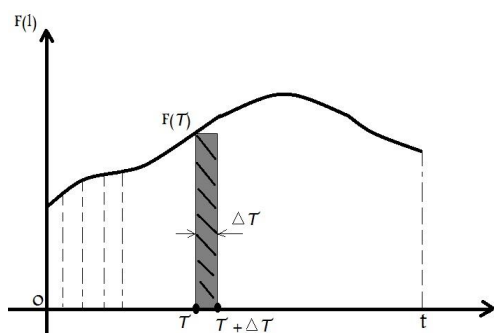
$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{-C_2'}{0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\varepsilon \omega_n t} \cos \left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\varepsilon \omega_n t} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \omega_d t \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\varepsilon \omega_n t} \sin(\omega_d t) \Rightarrow g(t) \quad \text{فرمول جایی جابه ضربه واحد}$$

$F(t)$		$X(t)$
$\delta(t)$ ضربه واحد	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$g(t)$ پاسخ ضربه واحد $g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\varepsilon\omega_n t} \sin(\omega_d t)$
$\tilde{F}$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$\tilde{F}.g(t) =$ $\tilde{F}.g(t) = \frac{\tilde{F}}{m\omega_d} e^{-\varepsilon\omega_n t} \sin(\omega_d t)$
$\delta(t - \tau)$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$g(t - \tau) =$ $= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\varepsilon\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t - \tau))$
$\delta(t) + \delta(t - \tau)$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$g(t) + g(t - \tau)$
$\tilde{F}_1\delta(t) + \tilde{F}_2\delta(t - \tau_1) + \tilde{F}_3\delta(t - \tau_3) + \dots$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$\tilde{F}_1g(t) + \tilde{F}_2g(t - \tau_1) + \tilde{F}_3g(t - \tau_3) + \dots$

انتگرال کانولوشن (دو حامل):



معمولاً نیروی برانگیزش نامتناوب در یک مدت مشخص اثر می کند و سپس حذف می شود. ساده ترین نوع آن نیروی ضربه ای است (نیروی بزرگی که در یک مدت کوتاه اثر می کند). و طبق رابطه ضربه-تکان انتگرال کانولوشن را بدست می آوریم.

$$\tilde{F} = \int_0^{\infty} F(t) dt = \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) dt = 1 \quad \left(\text{پاسخ ضربه واحد} \right)$$

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\varepsilon\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

چون ضربه به صورت دلخواه وارد می شود پس باید المان گیری کرد که از جمع این المان ها پاسخ ضربه بدست می آید:

$$\tilde{F}(\tau) + \delta(t - \tau) \rightarrow m, k, c \text{ سیستم ارتعاشی یک بعدی } \rightarrow \tilde{F}(\tau)g(t - \tau) = \tilde{F}(\tau)\Delta\tau g(t - \tau)$$

$$\tilde{F}(\tau) = \int_0^\infty F(t) d\tau = \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} F(\tau) d\tau = F(\tau)\tau \Big|_\tau^{\tau+\Delta\tau} = F(\tau) \cdot \Delta\tau$$

$$x(t) = \sum F(\tau_i) \Delta\tau g(t - \tau_i)$$

$$\text{if : } \Delta\tau \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) = \int_0^{t_1} F(\tau) g(t - \tau) d\tau \Rightarrow x(t) = \int_0^{t_1} F(\tau) \frac{1}{m\omega_d} e^{-\varepsilon\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t - \tau)) d\tau$$

انتگرال کانولوشن (تلفیق یا پیچش) یا انتگرال دو هامل:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} F(\tau) e^{-\varepsilon\omega_n(t-z)} \sin[\omega_d - (t - z)] d\tau$$

حل این انتگرال باید به روش تحلیلی یا عددی انجام شود.

$F(t)$		$X(t)$
$\delta(t)$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$g(t)$
$\delta(t - \tau)$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$g(t - \tau)$
$\overset{F}{\frown} \delta(t)$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$\overset{F}{\frown} g(t)$
$\overset{F}{\frown} \delta(t - \tau)$	سیستم ارتعاشی یک بعدی m, k, c	$\overset{F}{\frown} g(t - \tau)$

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل مسائل ارتعاشات:

برای تعیین پاسخ یک سیستم که تحت برانگیزش کلی قرار دارد از روش تبدیل لاپلاس می توان استفاده کرد. این روش را برای حل معادله های دیفرانسیل خطی، خصوصاً معادلاتی که ضرایب ثابت دارند نیز می توان به کار برد. در این روش معادلات دیفرانسیل را به صورت معادلات جبری درمی آورند؛ لذا تحلیل آنها ساده می شود. مزیت اصلی تبدیل لاپلاس این است که به سهولت می توان توابع ناپیوسته را نیز بررسی کند و شرایط اولیه را به طور خودکار در نظر می گیرد. برای استفاده از روشهای تبدیل لاپلاس مراحل زیر را باید طی کرد:

- ۱- نوشتن معادله حرکت سیستم
- ۲- محاسبه تبدیل لاپلاس تمام جمله های معادله حرکت برحسب شرایط اولیه
- ۳- پاسخ تبدیل یافته سیستم
- ۴- تعیین پاسخ با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st}dt$$

$$F(t) \rightarrow k(\alpha, t) \text{ هسته} \rightarrow F(\alpha)$$

$$F(t) \rightarrow k(s, t) \text{ تبدیل لاپلاس} \rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st}dt$$

(۱) تبدیل لاپلاس نیروی ثابت $F(t) = F_0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st}dt = \frac{F_0}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow F(s) = \frac{-F_0}{s} (0 - 1) = \frac{F_0}{s}$$

(۲) تبدیل لاپلاس نیروهای هارمونیک $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} F_0 \cos \omega t e^{-st}dt = F_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) e^{-st}dt$$

$$F(s) = \frac{F_0}{2} \int_0^{\infty} (e^{-(s-i\omega)t} + e^{-(s+i\omega)t})dt \Rightarrow F(s) = \frac{F_0}{2} \left[\frac{-1}{s-i\omega} e^{-(s-i\omega)t} + \frac{-1}{s+i\omega} e^{-(s+i\omega)t} \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$F(s) = \frac{F_0}{2} \left[\frac{-1}{s-i\omega} (0 - 1) - \frac{1}{s+i\omega} (0 - 1) \right] = \frac{F_0}{2} \left[\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right]$$

$$= \frac{F_0}{2} \left[\frac{s+i\omega+s-i\omega}{s^2+\omega^2} \right] \Rightarrow F(s) = F_0 \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

نکته : تبدیل لاپلاس یک تابع زوج، فرد میشود و تبدیل لاپلاس یک تابع فرد، زوج میشود.

(۳) تبدیل لاپلاس نیروی ضربه واحد $\delta(t)$:

$$F(s) = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon}\right) e^{-st} dt + \int_\epsilon^\infty (0) e^{-st} dt = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{-1}{s}\right) e^{-st} \Big|_0^\epsilon$$

$$F(s) = \frac{-(e^{-s\epsilon}-1)}{s\epsilon} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{از متغیر که مبهم است مشتق میگیریم}} F(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{0-(-s)e^{-st}}{s} = 1$$

(۴) تبدیل لاپلاس تابع پله ای $U(t)$:

$$F(s) = \int_0^\infty U(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty (1) e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty \Rightarrow F(s) = \frac{-1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s}$$

(۵) تبدیل لاپلاس پله واحد با تاخیر :

$$U(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^\tau (0) e^{-st} dt + \int_\tau^\infty (1) e^{-st} dt \Rightarrow F(s) = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_\tau^\infty = \frac{-1}{s} (0 - e^{-s\tau})$$

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-s\tau} = \frac{e^{-s\tau}}{s}$$

توجه) هر تابع دلخواه:

$$F(t) = F(t)[U(t - \tau_1) - U(t - \tau_2)]$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$$

$$F(t) = \dot{x} = \dot{x}(t)$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \dot{x}(t) dt \xrightarrow{\text{مشتق جز به جز}} \begin{cases} U = e^{-st} \\ dV = \dot{x}(t) dt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dU = -se^{-st} dt \\ V = x(t) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty U dV = UV \Big|_0^\infty - \int_0^\infty V dU$$

$$F(s) = x(t)e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}x(t)dt \Rightarrow F(s) = (0 - x(0)) + s \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$$

$$l\{\dot{x}(t)\} = sx(s) - x(0)$$

$$l\{\ddot{x}(t)\} = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

از معادله $m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$ لاپلاس می گیریم:

$$m[s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sx(s) - x(0)] + kx(s) = F(s)$$

$$s^2x(s) - sx_0 - \dot{x}_0 + \frac{C}{m}sx - \frac{C}{m}x_0 + \frac{K}{m}x = \frac{F(s)}{m}$$

$$x \left[s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{K}{m} \right] = \frac{F(s)}{m} + \frac{C}{m}x_0 + sx_0 + \dot{x}_0$$

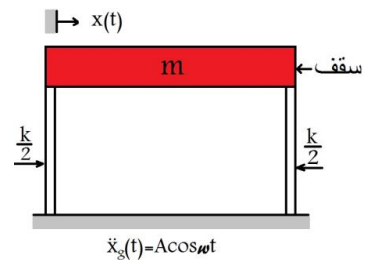
$$x = \frac{\frac{F(s)}{m} + \frac{C}{m}x_0 + sx_0 + \dot{x}_0}{s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{K}{m}} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} x(t) = \dots$$

مثال) پاسخ جابه جایی $x(t)$ سازه نشان داده شده را نسبت به نیروی نشان داده شده بدست آورید:

$$K = \frac{3EI}{L^3}$$

$$m\ddot{x} + Kx = F(t) \quad \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + Kx = F_0[U(t) - U(t - t_0)]$$



لاپلاس می گیریم:

$$s^2 X + \frac{K}{m} X = \frac{F_0}{ms} - \frac{F_0}{ms} e^{-st}$$

$$X(s^2 + \omega^2) = \frac{F_0}{ms} - \frac{F_0}{ms} e^{-st}$$

$$X = \frac{F_0}{ms(s^2 + \omega^2)} - \frac{F_0}{ms(s^2 + \omega^2)} e^{-st}$$

$$x(t) = l^{-1} X(s)$$

$$X(s) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} - \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} e^{-st} \right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) - \frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n (t - t_0)) \right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_n^2} [1 - \cos \omega_n t - 1 + \cos \omega_n (t - t_0)]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{K} [\cos \omega_n (t - t_0) - \cos \omega_n t]$$

نکته:

محیط لاپلاس $F(s)$	محیط زمان $F(t)$
$F(s)e^{-st}$	$F(t)U(t - t_0)$
$F(s) \equiv F(s + a)$	$F(t)e^{-st}$

$s \rightarrow s - (-a)$ در فضای لاپلاس فقط اثر شیفت دارد و کاری به تبدیل لاپلاس $F(t)$ ندارد.